14. Vorwärts- und Rückwärtseinschneiden

14.1. Einleitung

Vorwärtseinschneiden und **Rückwärtseinschneiden** sind zwei Verfahren in der Vermessungskunde, um von lagemäßig bekannten Punkten in der Natur einen lagemäßig unbekannten neuen Punkt (= Neupunkt) der Lage nach zu bestimmen und einzumessen. Die Richtungen „vorwärts" und „rückwärts" werden hier in der Weise verwendet, dass man „vorwärts" ins unbekannte Gelände schreitet, und „rückwärts" auf das bereits vermessene oder bekannte Gebiet blickt.

Während man beim **Vorwärtseinschneiden** von zwei lagemäßig bekannten, zugänglichen Punkten ausgeht und von dort aus den (nicht unbedingt zugänglichen) Neupunkt anpeilt, befindet man sich beim **Rückwärtseinschneiden** am (zugänglichen) Neupunkt und peilt rückwärts drei lagemäßig bekannte (nicht unbedingt zugängliche) Punkte an.

Hier wird nicht mit Koordinaten, sondern nur mit Längen- und Winkelmessungen gearbeitet.

Beide Berechnungsverfahren werden in der Vermessungsliteratur genau beschrieben.

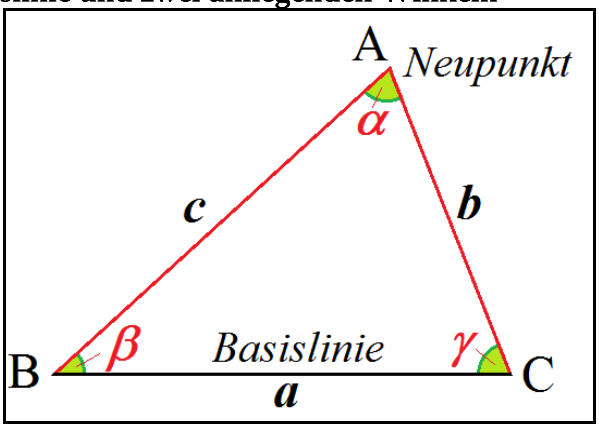
14.2. Vorwärtseinschneiden

14.2.1. Prinzip

Beim **Vorwärtseinschneiden** geht man von zwei lagemäßig bekannten, zugänglichen Punkten B und **C** aus, die eine Basislinie bilden, deren Länge genau bekannt ist. Von diesen beiden Punkten aus peilt man einen (nicht unbedingt zugänglichen) Neupunkt **A** an, indem man die Winkel an diesen Punkten zwischen der Basislinie und dem Neupunkt misst. Dies ist die Methode der Dreiecksbestimmung aus Seitenlänge und zwei anliegenden Winkeln.

14.2.2. Formeln

Bild 69: Dreieck aus Basislinie und zwei anliegenden Winkeln



Gegeben sind:

Lagemäßig gegeben sind die beiden Punkte B und C und somit auch die Länge der Basislinie ***a***. Nun werden die beiden Winkel β und γ an der Basislinie gemessen, ihre Summe muss kleiner als 180° sein. Der Winkel α am Punkt A ergibt sich aus der Winkelsumme im Dreieck:

$$\boxed{\alpha = 180° - (\beta + \gamma)}.$$

<u>Gesucht sind</u> die beiden Längen der Seiten ***b*** und ***c*** des Dreiecks.

Die Berechnung der gesuchten Längen ergibt sich aus dem Sinussatz für das allgemeine Dreieck. Der Winkel α muss nicht explizit ausgerechnet werden, denn der **sin(**α**)** ergibt sich unmittelbar aus den anderen beiden Winkeln:

Formel 228: Sinus des Gegenwinkels

$$\boxed{\sin\alpha = \sin(180° - (\beta + \gamma)) = \sin(\beta + \gamma)}.$$

Der Sinussatz lautet dann:

Formel 229: Sinussatz speziell für zwei gegebene Winkel

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}.$$

Daraus ergeben sich die beiden Seitenlängen:

Formel 230: Seitenlänge b

$$\boxed{b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}}$$ und

Formel 231: Seitenlänge c

$$\boxed{c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}}.$$

14.2.3. Voraussetzungen und Einschränkungen

14.2.3.1. Messungen in der Horizontalebene

Die Winkelmessungen erfolgen mit einem Winkelmessgerät. Der **Theodolit** ist ein Winkelmessgerät im Vermessungswesen, mit dem Vertikal- und Horizontalwinkel sehr genau gemessen werden können.

Bei den Messungen werden alle Längen und Winkel auf eine horizontale Ebene (Horizontalebene, Lageplanebene) bezogen, auch wenn die Blickrichtung nach oben oder unten verläuft.

Auch bei höheren oder tieferen Neupunkten werden nur die Winkel auf der waagrechten Skala (Horizontalwinkel) des Theodolits abgelesen. Sollte ausnahmsweise einmal der Höhenunterschied der Punkte interessieren, dann werden auch die Vertikalwinkel abgelesen.

Mit dem Sinussatz ergeben sich nur die horizontalen Längen, weil auch nur die horizontalen Winkel gemessen werden. Es interessieren ja auch nur die Strecken im Lageplan.

Sollen die schrägen Längen berechnet werden, müssen auch die Vertikalwinkel in die Rechnung einbezogen werden.

14.2.3.2. Triangulationsnetze

Da die Methode des Vorwärtseinschneidens sehr einfach ist, verwendet man sie, um Triangulationsnetze aufzubauen. Die Länge der Basislinie des ersten Grunddreiecks wird genau gemessen.

Unter der Bezeichnung „genau!“ versteht man Millimetergenauigkeit bei einer Messung in einer geraden Linie. Man wird also einen Laser-Entfernungsmesser verwenden.

Stahlmaßbänder sind hierzu nicht geeignet, weil sie bei der Messung durchhängen und sich bei der Zugkraft, das Maßband zu spannen, auch elastisch dehnen.

Für die Berechnung eines Triangulationsnetzes ist dies die einzige erforderliche Längenmessung. Mit den anliegenden Winkeln und der Länge der Basislinie werden die beiden anderen Seitenlängen berechnet. Diese dienen dann wieder als Basislinien für weitere Dreiecke, wobei jetzt nur die Winkel gemessen werden müssen, weil die Längen der Basislinien jeweils vorher berechnet wurden.

14.2.3.3. Einfluss der Erdkrümmung bei Triangulationsnetzen

Der Einfluss der Erdkrümmung wird hier nicht berücksichtigt. Jedes Dreieck soll als Horizontalebene für sich betrachtet werden, in der die Horizontalwinkel an der Basislinie gemessen werden. Bei größeren Dreiecksnetzen weisen die Horizontalebenen der benachbarten Dreiecke eine Lotabweichung auf, dies ist eine Folge der Erdkrümmung.

Wie die Vermessungsingenieure diese Probleme in den Griff bekommen, ist in der Vermessungsliteratur nachzulesen.

14.3. Rückwärtseinschneiden

Die Aufgabe des Rückwärtseinschneidens wird hier als gesamte Problemlösung mit Aufgabenstellung, Lösungsansatz und Herleitung gezeigt.

14.3.1. Prinzip

Beim **Rückwärtseinschneiden** befindet man sich am (zugänglichen) Neupunkt P und peilt rückwärts drei lagemäßig bekannte (nicht unbedingt zugängliche) Punkte A, B und C an und misst dabei die Winkel α und β.

Da beim Rückwärtseinschneiden die Länge einer bekannten Strecke und der dieser Strecke gegenüberliegende Winkel beim Neupunkt für eine Dreiecksbestimmung nicht genügen (für ein Dreieck müssen drei Bestimmungsstücke gegeben sein), muss ein zweites Dreieck hinzugenommen werden. Die Punkte A, B und P und die Punkte B, C und P sind Eckpunkte dieser beiden Dreiecke (Bild 70).

14.3.2. Aufgabenstellung

Gegeben müssen sein:

1. Die drei Punkte A, B und C müssen vom Neupunkt P aus sichtbar sein.
2. Die Längen a und b müssen bekannt sein.
3. Die beiden Winkel α und β am Neupunkt P werden durch Peilung in Richtung der Punkte A, B und C gemessen.
4. Der Winkel γ bei B muss bekannt sein.

Gesucht sind die Entfernungen x, y und z vom Neupunkt P aus zu den drei lagemäßig bekannten Punkten A, B und C (z.B. Bergspitzen, Kirchtürme).

Mit den gegebenen Werten kann eine Berechnung durchgeführt werden, deren Ergebnis die gesuchten Entfernungen sind.

14.3.3. Winkelsummen

Wir verwenden hier die Winkeleinheit Altgrad (°). Die Winkelsumme im Viereck ist 360°. Bekannt sind die Winkel α, β und γ, unbekannt sind die Winkel φ und ψ, die sich als Differenz zur Winkelsumme ergeben: $\boxed{\varphi+\psi = 360° - (\alpha+\beta+\gamma)}$

14.3.4. Herleitung

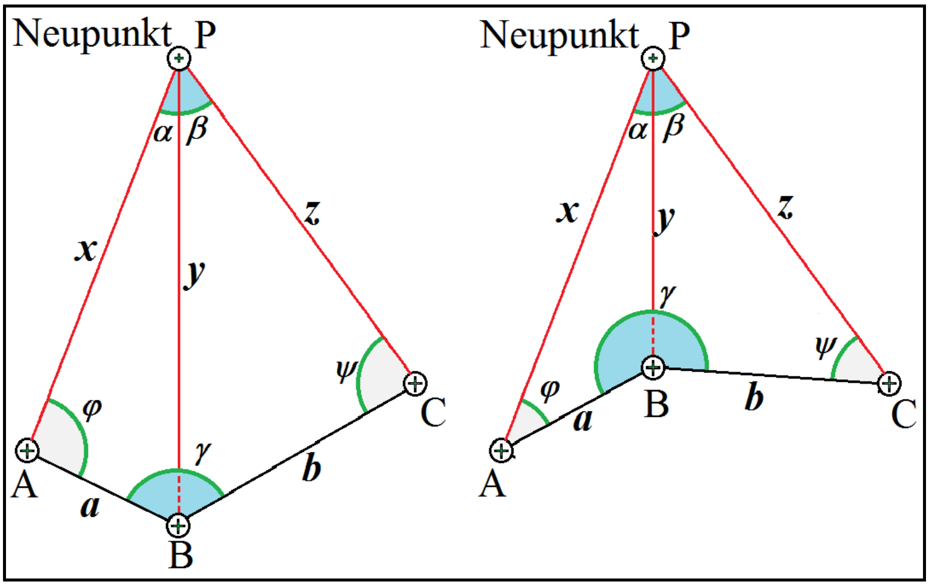
Herleitung siehe auch Lit. [3], dort Seite 205.

In Bild 70 zeigt zwei Situationen, einmal mit γ < 180° und einmal mit γ > 180°. Es handelt sich um ein Viereck mit Diagonale.

Da es hier keine gerichteten Größen (Winkel, Längen) gibt, funktioniert die Berechnung auch, wenn die Zeichnung spiegelbildlich verwendet wird. Bedingung ist, dass die Zuordnungen beibehalten werden: $\boldsymbol{x}$ zu PA, $\boldsymbol{y}$ zu PB, $\boldsymbol{z}$ zu PC, Winkelzuordnungen $\boldsymbol{\alpha}$ zu $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{\beta}$ zu $\boldsymbol{b}$.

Verwendet man den Sinussatz und setzt die Sinus der Winkel und ihre Gegenseiten ins Verhältnis, kommt man zu 5 Bestimmungsgleichungen. Es gilt also, ein Gleichungssystem mit den 5 Unbekannten $\boldsymbol{x, y, z, \varphi}$ und ψ zu lösen.

Bild 70: Lageskizze für das Rückwärtseinschneiden



Formel 232: Gleichungssystem

$$(1)\quad \frac{x}{a} = \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha}$$

$$(2)\quad \frac{z}{b} = \frac{\sin(\beta+\psi)}{\sin\beta}$$

$$(3)\quad \frac{y}{a} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$$

$$(4)\quad \frac{y}{b} = \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$$

$$(5)\quad \tau = \varphi + \psi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$$

Für die Winkelsumme (5) wird der Hilfswinkel τ verwendet. Da der Hilfswinkel τ bekannt ist, wird daraus ψ ermittelt:

(5) $\boxed{\psi = \tau - \varphi}$.

Aus (4) ergibt sich:

(6) $\boxed{\sin\psi = \frac{y}{b} \cdot \sin\beta}$.

Aus (3) ergibt sich:

(7) $\boxed{\sin\varphi = \frac{y}{a}\cdot\sin\alpha}$. Daraus folgt:

(8) $\boxed{\frac{\sin\psi}{\sin\varphi} = \frac{\sin(\tau-\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{a\cdot\sin\beta}{b\cdot\sin\alpha}}$.

Mit der Gleichung (2) der Formel 33 (Seite 40) formulieren wir:

(9) $\boxed{\sin(\tau-\varphi) = \sin\tau\cdot\cos\varphi - \cos\tau\cdot\sin\varphi}$.

Gleichung (9) eingesetzt in (8) ergibt:

(10) $\boxed{\frac{\sin\tau\cdot\cos\varphi - \cos\tau\cdot\sin\varphi}{\sin\varphi} = \sin\tau\cdot\cot\varphi - \cos\tau = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}$.

Diese Gleichung enthält nur noch φ als unbekannten Wert. Wir lösen (10) nach **cot** φ auf:

Formel 233: Kotangens φ

$$\boxed{k = \cot\varphi = \frac{a}{b}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\tau} + \frac{\cos\tau}{\sin\tau}}$$

Achtung!
Um den Winkel φ zu bekommen, müssen wir die **arccot-Funktion** anwenden. Da jeder Kotangenswert zwei Winkel repräsentiert, ist der Winkelquadrant zu berücksichtigen,. Der Winkel muss im ersten oder zweiten Quadranten liegen, also bei positivem Kotangens zwischen 0° und 90° und bei negativem Kotangens zwischen 90° und 180° (siehe Tabelle 5 auf Seite 93).

Sonderfälle: cot 90° = 0 und cot 0° = cot 180° = ∞

Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden und um keine Fallunterscheidung machen zu müssen, verwenden wir den Kotangens des halben Winkels, der immer eindeutig und positiv ist, der halbe Winkel liegt im ersten Quadranten (siehe dazu auch Erläuterungen unter 8.2.3 ab Seite 93 und Bild 36).

Aus den Additionstheoremen verwenden wir aus Formel 37 die Gleichung 29 (Seite 41) und formen sie um unter Verwendung der Formel 29 und Formel 30, damit sie Kotangenswerte akzeptiert:

$$\boxed{29)\quad \cot\frac{\varphi}{2} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1+\frac{\cot\varphi}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}} = \sqrt{1+\cot^2\varphi}+\cot\varphi}.$$

Wir setzen k für **cot** φ aus Formel 233 ein:

Formel 234: Kotangens des halben Winkels

$$\boxed{\cot\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1+\cot^2\varphi}+\cot\varphi = \sqrt{1+k^2}+k}$$

Aus diesem Kotangens würden wir durch die **arccot**-Funktion den Winkelwert erhalten. Da diese Funktion zwar mathematisch definiert ist, aber auf keinem Taschenrechner vorhanden ist, müssen wir auch hier noch einmal umformen. Dabei verwenden wir Gleichung 46 aus Formel 41 (Seite 44) und setzen $\cot\frac{\varphi}{2}$ ein: $\boxed{(46)\quad \operatorname{arccot}\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\cot\frac{\varphi}{2}\right)}$, wir erhalten:

Formel 235: Vom Kotangens zum Tangens

$$\varphi = 2 \cdot \mathbf{arccot}(\mathbf{cot}\,\frac{\varphi}{2}) = 2 \cdot \left[90° - \mathbf{arctan}(\mathbf{cot}\,\frac{\varphi}{2}) \right] = 180° - 2 \cdot \mathbf{arctan}(\mathbf{cot}\,\frac{\varphi}{2})$$.

14.3.5. Zusammenstellung der Aufgabenstellung und der Lösung

Aufgabenstellung:
Bezeichnungen nach Bild 70.
Gegeben: $\alpha, \beta, \gamma, a, b$.
Gesucht: φ, ψ, x, y, z .
Lösung:

Aus Formel 232, Gleichung 5:

$$\tau = \varphi + \psi = 360° - (\alpha + \beta + \gamma)$$

k aus Formel 233:

$$k = \cot\varphi = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\tau} + \frac{\cos\tau}{\sin\tau}$$

Kotangens des halben Winkels aus Formel 234:

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 + \cot^2\varphi} + \cot\varphi = \sqrt{1 + k^2} + k$$

Formel 236: Winkelwert für φ

$$\varphi = 2 \cdot \mathbf{arccot}\left(\cot\frac{\varphi}{2} \right) = 180° - 2 \cdot \mathbf{arctan}\left(\sqrt{1 + k^2} + k \right)$$.

Formel 237: Winkel ψ

$$\psi = \tau - \varphi$$

Mit Gleichung (1) aus Formel 232 berechnet man x:

Formel 238: Abstand von A nach P

$$x = a \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin\alpha}$$

Mit Gleichung (3) aus Formel 232 berechnet man y:

Formel 239: Abstand von B nach P

$$y = a \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$$ oder $$y = b \cdot \frac{\sin\psi}{\sin\beta}$$

Mit Gleichung (2) aus Formel 232 berechnet man z:

Formel 240: Abstand von C nach P

$$z = b \cdot \frac{\sin(\beta + \psi)}{\sin\beta}$$

14.3.6. Gültigkeitsgrenzen

Nullwerte oder negative Peilwinkel sind nicht zugelassen.

14.3.6.1. Bei α + β + γ ≠ 180° Problem lösbar

Das Problem des Rückwärtseinschneidens ist lösbar, wenn folgende Bedingungen eingehalten werden: $\boxed{0 < (\alpha + \beta + \gamma) < 180°}$ oder $\boxed{180° < (\alpha + \beta + \gamma) < 360°}$.

14.3.6.2. Bei α + β + γ = 180° keine Lösung des Problems

Bei $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ bilden die Gegenwinkel im Viereck (siehe Bild 70) jeweils die Summe von 180°: $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$ und $\boxed{\varphi + \psi = 180°}$. Definitionsgemäß sind das die Bedingungen für ein Sehnenviereck im Kreis (siehe unter 16.1 auf Seite 148).

Die Strecken ***a, b, x*** und ***z*** bilden ein Sehnenviereck in diesem Kreis, beim Sehnenviereck liegen alle 4 Punkte ABCP auf einem Kreis.

Nachweis über die Peripheriewinkel:

Bei diesem Sehnenviereck sind zwei benachbarte Seiten ***a*** und ***b*** bekannt, die im Kreis zwei Sehnen bilden, deren Peripheriewinkel ***α*** und ***β*** sind. Der Punkt P kann sich deshalb an beliebiger Stelle zwischen A und B auf der Kreislinie befinden, die Peripheriewinkel ***α*** und ***β*** bleiben immer gleich. Die Längen der beiden anderen Seiten ***x*** und ***z*** können deshalb nicht berechnet werden. Für diesen Fall ist die Aufgabe nicht lösbar.

Siehe Berechnung des Sehnenvierecks im Kapitel 16 ab Seite 148.

14.3.7. Taschenrechnerprogramm

Das Programm **RWE.txt** für einen HP-Taschenrechner steht als Einzelprogramm im Programme-Ordner auf der Praxelius-Homepage zur Verfügung. Die nachfolgenden Beispiele wurden mit einem HP 50g Taschenrechner berechnet. Bei den HP-Taschenrechnern mit kleinerem Bildschirm muss vorher auf MINIFONT umgeschaltet werden. Informationen zur Handhabung der wissenschaftlichen HP-Taschenrechner siehe Lit.[11].

Beispiel 1 (Ergebnisse Bild 71):

Eine rechteckige Halle mit ***a*** = 20 m und ***b*** = 40 m wird angepeilt. Die Peilwinkel betragen:
α = 5,2° für die Seite a und
β = 6,5° für die Seite b.
γ = 270°, weil die rechtwinklige Ecke zum Neupunkt zeigt.

Beispiel 2: (siehe dazu Bild 81 auf Seite 169)

Der Punkt P befindet sich auf der Diagonale AC eines rechteckigen Grundstücks mit den Seitenlängen ***a*** = 30 m und ***b*** = 40 m und zwar im Lotpunkt vom Eckpunkt B. Die Peilwinkel ***α*** zur Seite ***a*** und ***β*** zur Seite ***b*** betragen je 90°. Der Innenwinkel bei B beträgt ebenfalls 90°. Also setzen wir ein: ***γ*** = 90°. Dann können mit dem Programm die Diagonalenabschnitte und der Abstand PB berechnet werden. Ergebnisse siehe Bild 72.

Das Taschenrechnerprogramm liefert folgende Ergebnisse:

Bild 71: Beispiel 1

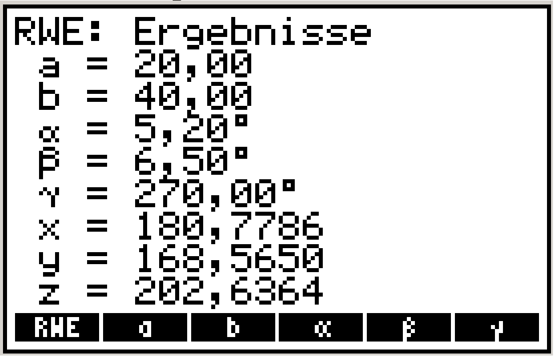
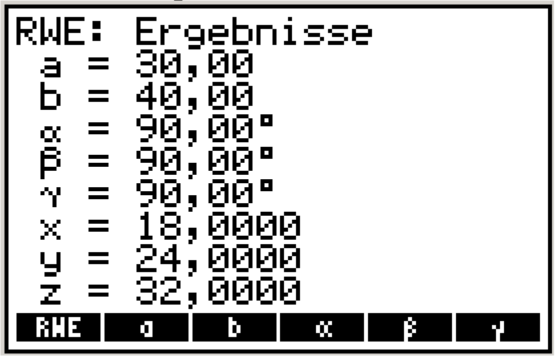


Bild 72: Beispiel 2



15. Geometrie der Vierecke in der Ebene

Der Vollständigkeit halber werden auch die einfachen Figuren wie Quadrat und Rechteck hier behandelt.
In Lit. [5] wird auf Seite 186 das Viereck mit den Worten beschrieben (Zitat):

> *Durch vier voneinander verschiedene Punkte einer Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, lassen sich genau sechs Geraden legen, die jeweils zwei Punkte miteinander verbinden. Die vier Punkte werden zu Eckpunkten eines Vierecks. Wird für die Eckpunkte ein bestimmter Umlaufsinn festgelegt, so sind die Verbindungsstrecken aufeinanderfolgender Punkte Seiten, die Verbindungsstrecken nicht aufeinanderfolgender Punkte Diagonalen eines Vierecks. (Zitatende).*

15.1. Formen der Vierecke

Unter Vierecken versteht man folgende 8 Figuren:

1. Quadrat (Seite 168).
2. Rechteck (Seite 169)
3. Rhombus (Seite 170)
4. Rhomboid (Seite 172)
5. Drachenviereck (Seite 174)
6. Trapez (Seite 175)
7. Trapezoid = allgemeines konvexes Viereck (Seite 161)
8. Konkaves Viereck (eine einspringende Ecke)

Die Figuren Nr. 1 bis Nr. 4 sind Parallelogramme.

Bild 73: Formen der Vierecke