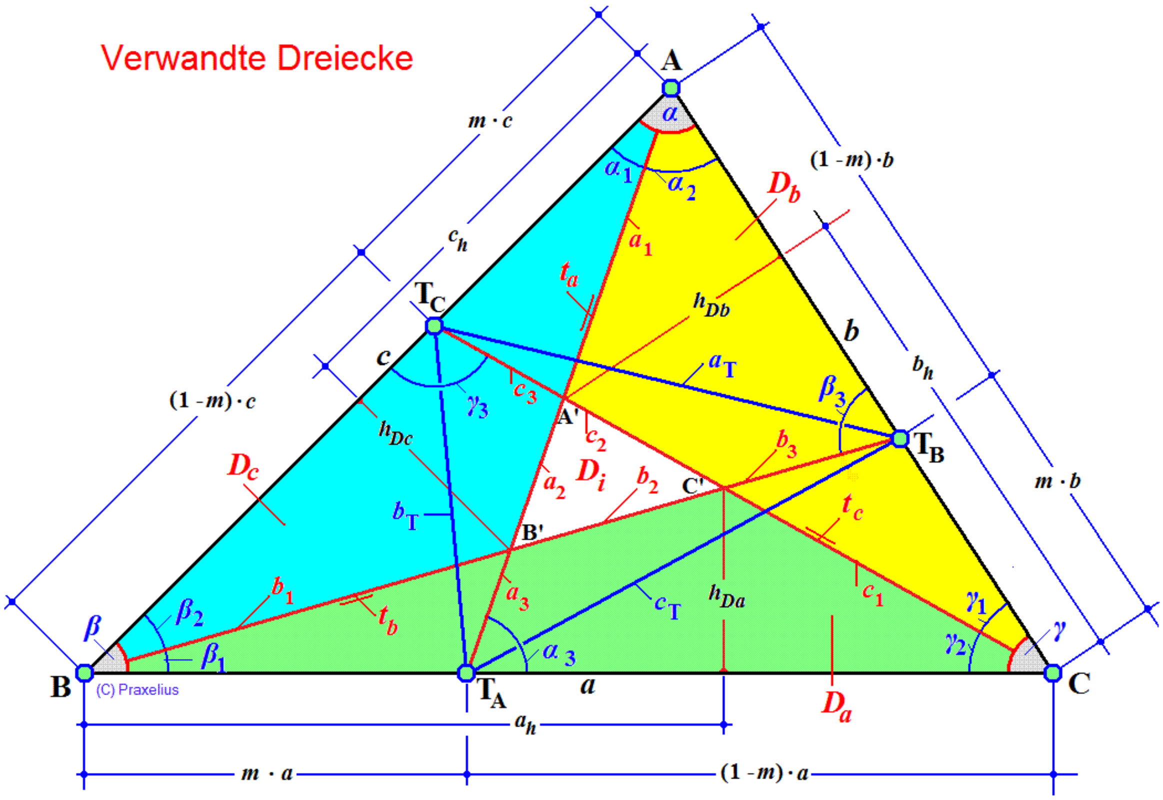
Otto Praxl

Verwandte Dreiecke

Verwandte Dreiecke entstehen durch zyklisch angeordnete Teilungslinien in einem Dreieck.
Diese Dreiecke sind verwandt unter dem Aspekt von gleichen geometrischen Eigenschaften.

Verfasser: *Otto Praxl*



Impressum

Verfasser:

Otto Praxl.

Internetseite:

www.praxelius.de

Urheberrecht:

Das Dokument ist urheberrechtlich geschützt (Urheberrechtsgesetz UrhG vom 9. September 1965 in der Fassung vom 13. September 2003).

Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich zugelassenen Fälle bedarf einer vorherigen schriftlichen Vereinbarung mit dem Verfasser. Jede widerrechtliche Nutzung wäre ein Verstoß gegen das Urheberrechtsgesetz, der gerichtlich verfolgt werden kann.

Alle Werknutzungsrechte liegen beim Verfasser. Alle Rechte vorbehalten!

Veröffentlichung

Das Dokument wird als verschlüsseltes PDF-Dokument auf der Homepage *www.praxelius.de* veröffentlicht. Es darf nicht außerhalb dieser Homepage veröffentlicht werden.

Layout und Gestaltung (mit Microsoft WORD™ 2007)**:**

Otto Praxl

Für das Lesen mit einem PDF-Reader wurden alle Übersichten, Verzeichnisse und die Querverweise im Text mit Hyperlinks unterlegt, die nach Mausklick zur gewünschten Stelle im Text verzweigen und nach Klick auf die Schaltfläche „Zurück zur vorigen Seitenansicht“ wieder zur ursprünglichen Stelle im Text zurückführen.

Rechtschreibung:

Die deutsche Rechtschreibung erfolgt nach den amtlichen Regeln von 2006.
Wenn die Eindeutigkeit einer Aussage es erfordert, wird von diesen Regeln bewusst abgewichen.

Haftungsausschluss:

Im Text, in den Programmen und in den Grafiken können auch Fehler enthalten sein. Für evtl. Fehler und daraus resultierende Nachteile übernimmt der Verfasser keine Haftung.

Bildnachweise:

Alle Zeichnungen und die speziellen Formeln stammen vom Verfasser.

Letztes Bearbeitungsdatum: 02.02.2012

Bearbeitungskennzeichen: VDR-26331-008

Inhaltsverzeichnis

1 Verwandte Dreiecke

1.1 Vorbemerkung

In dieser Abhandlung werden die Formeln für die verwandten Dreiecke hergeleitet. Kenntnisse der Dreiecksberechnung und der ebenen Trigonometrie werden beim Leser vorausgesetzt.

Verwandte Dreiecke entstehen durch zyklisch angeordnete Teilungslinien in einem Dreieck. Durch die Teilung bei gleichem Teilungsverhältnis der Seiten entstehen 3 äußere Dreiecke, die zwar gleiche Flächeninhalte haben, aber nicht winkeltreu sind. Diese Dreiecke sind verwandt unter dem Aspekt von gleichen geometrischen Eigenschaften.

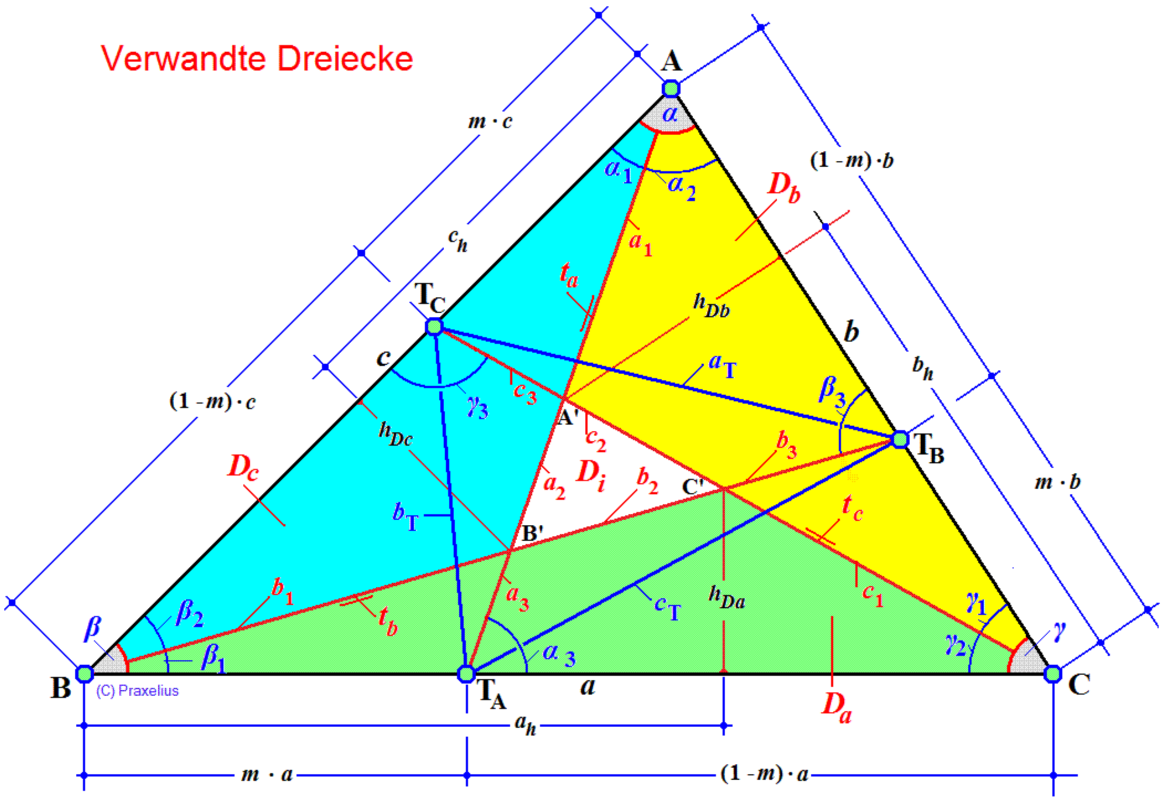
Das Wort „verwandt“ hat hier nichts zu tun mit der Vergangenheitsform des Zeitworts „verwenden“. Im Falle von „verwandten Dreiecken“ ist es ein Eigenschaftswort, das auf die mathematische Verwandtschaft der Dreiecke hinweist. Diese Dreiecke sind verwandt unter dem Aspekt von gleichen geometrischen Eigenschaften.

1.2 Geometrie

1.2.1 Bezeichnungen

Bild 1 zeigt die geometrischen Zusammenhänge und Bezeichnungen[1].

Bild 1: Geometrie der verwandten Dreiecke



---

[1] *Die Multiplikationspunkte in der Zeichnung und in den Formeln sind meist entbehrlich, sie werden nur der Deutlichkeit halber angegeben.*

1.2.2 Bedeutung der Bezeichnungen

Tabelle 1: Bedeutung der Bezeichnungen

Bezeichnung	**Bedeutung**
ABC	Beliebiges zu teilendes Dreieck (= gegebenes Dreieck)
A, **B**, **C**	Eckpunkte des Dreiecks **ABC**
a, b, c	Seitenlängen des Dreiecks **ABC** **(gegeben)**
m	Teilungsverhältnis $m : 1$ = Anteil der Seitenlänge **(gegeben)**
α, β, γ	Eckwinkel des Dreiecks **ABC**
F	Flächeninhalt des Dreiecks **ABC**
$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2,$	Teilungswinkel an den Eckpunkten **A, B** und **C**
$\alpha_3 , \beta_3 , \gamma_3$	Winkel der Teilungslinien t_a , t_b , t_c zu den Seiten a, b, c
T_a , T_b , T_c	Teilungspunkte bei $m : (1-m)$ der Dreieckseiten a, b, c
t_a , t_b , t_c	Längen der Teilungslinien AT_a , BT_b und CT_c
a_1 , a_2 , a_3	Teilstrecken der Teilungslinie t_a
b_1 , b_2 , b_3	Teilstrecken der Teilungslinie t_b
c_1 , c_2 , c_3	Teilstrecken der Teilungslinie t_c
D_a	äußeres Dreieck mit den Eckpunkten **BCC'** (grün)
D_b	äußeres Dreieck mit den Eckpunkten **CAA'** (gelb)
D_c	äußeres Dreieck mit den Eckpunkten **ABB'** (blau)
F_a , F_b , F_c , F_x	Flächeninhalte der äußeren Dreiecke D_a , D_b , D_c
D_i	inneres Dreieck mit den Eckpunkten **A' B' C'**
F_i	Flächeninhalt des inneren Dreiecks D_i
a_2 , b_2 , c_2	Seitenlängen des inneren Dreiecks D_i
h_{Da} , h_{Db} , h_{Dc}	Höhen der äußeren Dreiecke D_a , D_b , D_c , bezogen auf die Seitenlängen a, b, c
a_h , b_h , c_h	Abstände der Höhenfußpunkte h_{Da} , h_{Db} , h_{Dc} von den linken Eckpunkten
F_T	Flächeninhalt des Dreiecks $T_aT_bT_c$
a_T, b_T, c_T	Seitenlängen des Dreiecks $T_aT_bT_c$
D_{EA}	Eckdreieck mit den Eckpunkten T_bAT_c
D_{EB}	Eckdreieck mit den Eckpunkten T_cBT_a
D_{EC}	Eckdreieck mit den Eckpunkten T_aCT_b
f_E	Flächeninhalt eines Eckdreiecks D_{EA}, D_{EB} oder D_{EC}

1.3 Definition

Für verwandte Dreiecke gelten folgende Voraussetzungen (siehe Bild 1 und Tabelle 1):

1. Verwandte Dreiecke entstehen aus dem Dreieck **ABC** durch zyklisch angeordnete Teilungslinien, wobei jede Dreieckseite das gleiche Teilungsverhältnis $\boldsymbol{m} : (1 - \boldsymbol{m})$ hat.
2. Der Wert $\boldsymbol{m}$ ist variabel, wobei $\mathbf{0} < \boldsymbol{m} < \mathbf{1}$ gilt. $\boldsymbol{m} = 0$ und $\boldsymbol{m} = 1$ sind Sonderfälle, die hier nicht behandelt werden, weil sie keine Teilung des gegebenen Dreiecks bewirken.
3. Jeder Eckwinkel wird durch die Teilungslinie in zwei Teilungswinkel zerlegt.
4. Die Teilungspunkte $\mathbf{T_a}$, $\mathbf{T_b}$ und $\mathbf{T_c}$ auf den Dreieckseiten sind mit den gegenüberliegenden Eckpunkten **A**, **B** und **C** durch die Teilungslinien $\boldsymbol{t}_\mathbf{a}$, $\boldsymbol{t}_\mathbf{b}$ und $\boldsymbol{t}_\mathbf{c}$ verbunden.
5. Die Teilung ist dann zyklisch, wenn am Umfang die Anteile $\boldsymbol{m}$ und $(1 - \boldsymbol{m})$ der geteilten Seiten bei einem Umlauf abwechselnd aufeinander folgen (siehe äußere Maßlinien in Bild 1).
6. Jede Teilungslinie, die von einem Eckpunkt ausgeht, teilt den Flächeninhalt $\boldsymbol{F}$ des Dreiecks **ABC** in zwei Teile der Größen $\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{F}$ und $(1 - \boldsymbol{m}) \cdot \boldsymbol{F}$.
7. Durch die Teilungslinien wird das Dreieck **ABC** zerschnitten. Es entstehen drei äußere Dreiecke $\boldsymbol{D_a}$, $\boldsymbol{D_b}$ und $\boldsymbol{D_c}$ und ein inneres Dreieck $\boldsymbol{D_i}$.
8. Jedes äußere Dreieck wird durch Teilstrecken von zwei Teilungslinien und einer Dreieckseite begrenzt**.** Die dritte Teilungslinie schneidet das äußere Dreieck in zwei Teile. Es entsteht ein Teildreieck und ein Viereck.
9. Jede Teilungslinie wird durch die beiden anderen Teilungslinien in jeweils drei Teilstrecken geteilt:
   $$\boldsymbol{t}_\mathbf{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3$$
   $$\boldsymbol{t}_\mathbf{b} = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3$$
   $$\boldsymbol{t}_\mathbf{c} = \boldsymbol{c}_1 + \boldsymbol{c}_2 + \boldsymbol{c}_3$$
10. Für das Teilungsverhältnis $\boldsymbol{m} : (1 - \boldsymbol{m})$ der Dreieckseiten gilt: $\mathbf{0} < \boldsymbol{m} < \mathbf{1}$**.** Es genügt, $\mathbf{0} < \boldsymbol{m} \leq \mathbf{0{,}5}$ zu verwenden , denn $\mathbf{0{,}5} \leq \boldsymbol{m} < \mathbf{1}$ führt zu den selben Ergebnissen, nur an $\boldsymbol{m} = \mathbf{0{,}5}$ gespiegelt (siehe Bild 2).
11. Bei $\boldsymbol{m} = \mathbf{0{,}5}$ ist $\boldsymbol{F}_\mathbf{i} = \mathbf{0}$ und die äußeren Dreiecke haben dann den Flächeninhalt je $\boldsymbol{F}/\mathbf{3}$, denn die Teilungslinien sind dann die Schwerelinien des Dreiecks und schneiden sich im Schwerpunkt des Dreiecks **ABC**, dieser liegt bekanntlich auf 1/3 jeder Dreieckshöhe.

2 Berechnung des gegebenen Dreiecks ABC

Das Dreieck **ABC** hat die drei Seiten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ und die drei Winkel $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{\gamma}$. Von diesen 6 Elementen müssen drei bekannt sein, um den Flächeninhalt $\boldsymbol{F}$ und die anderen Größen des Dreiecks berechnen zu können.

Hier sind die drei Seitenlängen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ des Dreiecks **ABC** und das Teilungsverhältnis $\boldsymbol{m}$ gegeben.

Aus den gegebenen Werten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ wird der Flächeninhalt $\boldsymbol{F}$ des gegebenen Dreiecks **ABC** und die drei Eckwinkel $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ berechnet.

2.1 Flächeninhalt F aus Seitenlängen

Siehe auch den Beitrag „Heronische Formel“.

Die Heronische Formel ermöglicht die Berechnung des Flächeninhalts aus den drei Seitenlängen des Dreiecks:

Formel 1: Heronische Formel

$$\boxed{F = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$$

Formel 2: Halber Umfang des Dreiecks ABC

$\boxed{s = \frac{a+b+c}{2}}$ ist dabei der halbe Umfang des Dreiecks.

2.2 Eckwinkel aus Seitenlängen und Flächeninhalt

Mit den Seitenlängen a, b und c des Dreiecks und dem Flächeninhalt F kann man die Sinuswerte der Eckwinkel α, β und γ des Dreiecks berechnen.

Nach dem Sinussatz gilt:

Formel 3: Winkel am Eckwinkel A aus Flächeninhalt

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{2F}{b \cdot c}}$$

Formel 4: Winkel am Eckpunkt B aus Flächeninhalt

$$\boxed{\sin\beta = \frac{2F}{a \cdot c}}$$

Formel 5: Winkel am Eckpunkt C aus Flächeninhalt

$$\boxed{\sin\gamma = \frac{2F}{a \cdot b}}$$

Der Sinus gilt für spitze Winkel < 90° und auch für stumpfe Winkel > 90° und bestimmt daher den Winkel nicht eindeutig.

Dagegen bestimmt der Kosinus den Winkel zwischen 0° und 180° eindeutig, da dieser für stumpfe Winkel negativ ist.

Mit den Seitenlängen a, b und c des Dreiecks kann man über den Kosinussatz die Kosinuswerte der Eckwinkel α, β und γ des Dreiecks berechnen.

Nach dem Kosinussatz gilt:

Formel 6: Winkel am Eckpunkt A aus Kosinussatz

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}}$$

Formel 7: Winkel am Eckpunkt B aus Kosinussatz

$$\boxed{\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}}$$

Formel 8: Winkel am Eckpunkt C aus Kosinussatz

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}}$$

3 Berechnung der verwandten Dreiecke

Zuerst werden über die Seitenlängen ***a***, ***b*** und ***c*** und die anliegenden Teilungswinkel die äußeren Dreiecke allgemein berechnet. Es entsteht ein Ansatz, bei dem die Tangenswerte der Teilungswinkel gebraucht werden. Aus den geometrischen Beziehungen der Seitenlängen werden die Teilungswinkel der äußeren Dreiecke aus Bild 1 über Sinussatz und Kosinussatz ermittelt.

Sind die Flächeninhalte der äußeren Dreiecke bekannt, dann ist der Flächeninhalt des inneren Dreiecks die Differenz zwischen der Summe der äußeren Dreiecke und des Flächeninhalts ***F*** des gegebenen Dreiecks.

Die Teildreiecke innerhalb eines äußeren Dreiecks ergeben sich als Differenz zwischen der Teilfläche ***m·F*** und der Fläche des äußeren Dreiecks.

Damit können alle Flächeninhalte und ihre Verhältnisse zueinander berechnet werden.

Die Ermittlung der Längen und Teilstrecken der Teilungslinien ergeben sich aus den Größenverhältnissen der verschieden Flächen zueinander.

3.1 Teilungsverhältnisse der Eckwinkel

Jede Teilungslinie teilt den jeweiligen Eckwinkel in zwei Teilungswinkel.

Tabelle 2: Bezeichnungen der Teilungswinkel

Eckpunkt	Teilungswinkel
A	$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$
B	$\beta = \beta_1 + \beta_2$
C	$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

Bei den beiden so entstandenen Teildreiecken wird der Sinussatz angewendet (siehe Bild 1).

Für den Eckpunkt A ergibt sich der Ansatz:

$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{m\cdot a} = \frac{\sin\beta}{t_a}}$ und $\boxed{\frac{\sin\alpha_2}{(1-m)\cdot a} = \frac{\sin\gamma}{t_a}}$ und aus dem Gesamtdreieck folgt $\boxed{\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$.

Aus diesen drei Gleichungen ergibt sich Formel 9:

Formel 9: Teilungsverhältnis am Eckpunkt A

$$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{m}{1-m}\cdot\frac{b}{c}}$$

Für die anderen Eckpunkte ergibt sich zyklisch Formel 10

Formel 10: Teilungsverhältnis am Eckpunkt B

$$\boxed{\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} = \frac{m}{1-m}\cdot\frac{c}{a}}$$

und Formel 11

Formel 11: Teilungsverhältnis am Eckpunkt C

$$\boxed{\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{m}{1-m}\cdot\frac{a}{b}}$$

3.2 Teilungswinkel an den Eckpunkten

Der Ansatz der Gleichungen für die Tangenswerte der 6 Teilungswinkel wird aus Bild 1 hergeleitet. Mit den oben in Abschnitt 2.2 hergeleiteten Formeln

$\boxed{\sin\alpha = \frac{2F}{b \cdot c}}$ (Formel 3), $\boxed{\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}}$ (Formel 6),

$\boxed{\sin\beta = \frac{2F}{a \cdot c}}$ (Formel 4), $\boxed{\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}}$ (Formel 7)

$\boxed{\sin\gamma = \frac{2F}{a \cdot b}}$ (Formel 5) und $\boxed{\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}}$ (Formel 8)

werden die in diesem Ansatz erforderlichen Sinus- und Kosinuswerte der Eckwinkel des gegebenen Dreiecks berechnet und eingesetzt. Daraus ergibt sich der zweite Teil der Gleichungen, wo nur die bekannten Werte ***F*, *a*, *b*, *c***, ***m*** vorkommen:

Formel 12: Winkel im Dreieck D_a

$$\tan\beta_1 = \frac{m \cdot b \cdot \sin\gamma}{a - m \cdot b \cdot \cos\gamma} = \frac{4 \cdot m \cdot F}{2 \cdot a^2 - m \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$\tan\gamma_2 = \frac{(1-m) \cdot c \cdot \sin\beta}{a - (1-m) \cdot c \cdot \cos\beta} = \frac{4 \cdot (1-m) \cdot F}{2 \cdot a^2 - (1-m) \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}$$

Formel 13: Winkel im Dreieck D_b

$$\tan\gamma_1 = \frac{m \cdot c \cdot \sin\alpha}{b - m \cdot c \cdot \cos\alpha} = \frac{4 \cdot m \cdot F}{2 \cdot b^2 - m \cdot (b^2 + c^2 - a^2)}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{(1-m) \cdot a \cdot \sin\gamma}{b - (1-m) \cdot a \cdot \cos\gamma} = \frac{4 \cdot (1-m) \cdot F}{2 \cdot b^2 - (1-m) \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}$$

Formel 14: Winkel im Dreieck D_c

$$\tan\alpha_1 = \frac{m \cdot a \cdot \sin\beta}{c - m \cdot a \cdot \cos\beta} = \frac{4 \cdot m \cdot F}{2 \cdot c^2 - m \cdot (c^2 + a^2 - b^2)}$$

$$\tan\beta_2 = \frac{(1-m) \cdot b \cdot \sin\alpha}{c - (1-m) \cdot b \cdot \cos\alpha} = \frac{4 \cdot (1-m) \cdot F}{2 \cdot c^2 - (1-m) \cdot (c^2 + b^2 - a^2)}$$

Diese Tangenswerte werden in Formel 15, Formel 16 und Formel 17 (siehe unten) eingesetzt.

3.3 Flächeninhalte der äußeren Dreiecke

Für die Berechnung der Flächeninhalte F_a, F_b und F_c der äußeren Dreiecke werden die Dreieckseiten und die beiden an die jeweilige Seite anliegenden Winkel verwendet.

Für das Dreieck D_a gilt:

$$\boxed{F_a = \frac{a \cdot h_{Da}}{2}}$$

$$\boxed{h_{Da} = a_h \cdot \tan\beta_1 = (a - a_h) \cdot \tan\gamma_2}$$

Daraus wird a_h berechnet:

$$\boxed{a_h = a \cdot \frac{\tan\gamma_2}{\tan\beta_1 + \tan\gamma_2}}.$$

$$\boxed{h_{Da} = a_h \cdot \tan\beta_1 = a \cdot \frac{\tan\beta_1 \cdot \tan\gamma_2}{\tan\beta_1 + \tan\gamma_2}}$$

Daraus ergibt sich die Formel für den Flächeninhalt des Dreiecks D_a, wobei die Tangenswerte nach Formel 12 eingesetzt werden.

Formel 15: Flächeninhalt Dreieck D_a

$$F_a = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\tan\beta_1 \cdot \tan\gamma_2}{\tan\beta_1 + \tan\gamma_2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tan\beta_1} + \frac{1}{\tan\gamma_2}} = F \cdot \frac{m \cdot (1-m)}{1 - m \cdot (1-m)}$$

Für die beiden Dreiecke D_b und D_c folgt zyklisch:

Formel 16: Flächeninhalt Dreieck D_b

$$F_b = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{\tan\gamma_1 \cdot \tan\alpha_2}{\tan\gamma_1 + \tan\alpha_2} = \frac{b^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tan\gamma_1} + \frac{1}{\tan\alpha_2}} = F \cdot \frac{m \cdot (1-m)}{1 - m \cdot (1-m)}$$

Formel 17: Flächeninhalt Dreieck D_c

$$F_c = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\tan\alpha_1 \cdot \tan\beta_2}{\tan\alpha_1 + \tan\beta_2} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tan\alpha_1} + \frac{1}{\tan\beta_2}} = F \cdot \frac{m \cdot (1-m)}{1 - m \cdot (1-m)}.$$

Nach Einsetzen der Tangenswerte aus Formel 12, Formel 13 und Formel 14 ergibt sich für alle drei äußeren Dreiecke D_a, D_b und D_c der gleiche Flächeninhalt, der nur von F und m abhängig ist. Die Form des ursprünglichen Dreiecks **ABC** spielt keine Rolle. Für den Flächeninhalt eines beliebigen äußeren Dreiecks gilt die Bezeichnung F_x.

Formel 18: Flächeninhalt der äußeren Dreiecke

$$F_x = F_a = F_b = F_c = F \cdot \frac{m \cdot (1-m)}{1 - m \cdot (1-m)}$$

3.4 Flächeninhalt des inneren Dreiecks

Für das innere Dreieck $\boldsymbol{D_i}$ ergibt sich der Flächeninhalt:

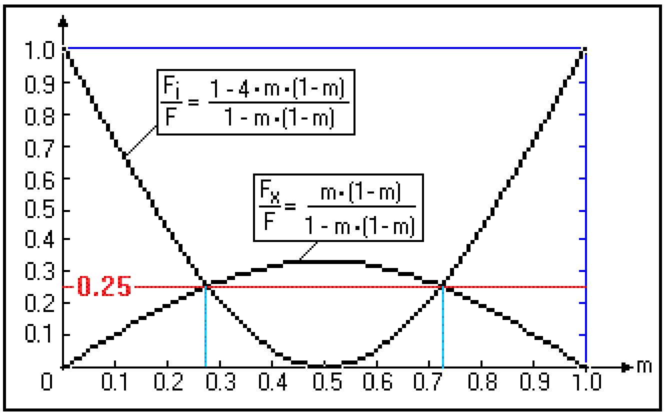
$\boldsymbol{F_i = F - 3\,F_x}$

Formel 19: Flächeninhalt des inneren Dreiecks

$$F_i = F - 3 \cdot F_x = F \cdot \left[1 - \frac{3 \cdot m \cdot (1-m)}{1 - m \cdot (1-m)}\right] = F \cdot \frac{1 - 4 \cdot m \cdot (1-m)}{1 - m \cdot (1-m)}$$

Bild 2 zeigt die grafische Darstellung der Formeln für die Flächeninhalte von $\boldsymbol{F_i}$ und $\boldsymbol{F_x}$.

Bild 2: Verhältnis der Flächeninhalte



Wenn $\boldsymbol{F_i = F_x}$ ist, so ist $\boxed{1 = 5 \cdot m \cdot (1-m)}$.
Daraus folgt $\boldsymbol{m}$ **= 0,27639320225** oder $\boldsymbol{m}$ **= 0,72360679775.**

Dies sind die Schnittpunkte der beiden Kurven in Bild 2. Für dieses $\boldsymbol{m}$ sind $\boldsymbol{F_i}$ und alle $\boldsymbol{F_x}$ flächengleich, nämlich $\boldsymbol{F}$/4**.**

3.5 Eigenschaften der Teilungslinien

3.5.1 Längen der Teilungslinien

Die Längen der Teilungslinien $\boldsymbol{t_a}$, $\boldsymbol{t_b}$ und $\boldsymbol{t_c}$ ergeben sich mit dem Kosinussatz, der für jeden Eckpunkt, die Gegenseite und die Teilungslinie angewendet wird. Dann fällt der Kosinus des Winkels heraus und nur die Längen bleiben übrig.

Formel 20: Längen der Teilungslinien

$$t_a = \sqrt{(1-m) \cdot c^2 - m \cdot (1-m) \cdot a^2 + m \cdot b^2}$$
$$t_b = \sqrt{(1-m) \cdot a^2 - m \cdot (1-m) \cdot b^2 + m \cdot c^2}$$
$$t_c = \sqrt{(1-m) \cdot b^2 - m \cdot (1-m) \cdot c^2 + m \cdot a^2}$$

3.5.2 Winkel der Teilungslinien

Aus Bild 1 werden Tangenswerte hergeleitet und die Formeln für die Sinus- und Kosinuswerte der Eckwinkel eingesetzt:

Formel 21: Tangenswerte für die Winkel der Teilungslinien

$$\tan\alpha_3 = \frac{c\cdot\sin\beta}{c\cdot\cos\beta - m\cdot a} = \frac{4\cdot F}{a^2+c^2-b^2-2\cdot m\cdot a^2}$$
$$\tan\beta_3 = \frac{a\cdot\sin\gamma}{a\cdot\cos\gamma - m\cdot b} = \frac{4\cdot F}{a^2+b^2-c^2-2\cdot m\cdot b^2}$$
$$\tan\gamma_3 = \frac{b\cdot\sin\alpha}{b\cdot\cos\alpha - m\cdot c} = \frac{4\cdot F}{b^2+c^2-a^2-2\cdot m\cdot c^2}$$

Bei Verwendung der Längen der Teilungslinien ergeben sich mit dem Kosinussatz folgende Gleichungen für die Winkel der Teilungslinien:

Formel 22: Kosinuswerte für die Winkel der Teilungslinien

$$\cos\alpha_3 = \frac{(1-m)^2\cdot a^2 + t_a{}^2 - b^2}{2\cdot(1-m)\cdot a\cdot t_a}$$
$$\cos\beta_3 = \frac{(1-m)^2\cdot b^2 + t_b{}^2 - c^2}{2\cdot(1-m)\cdot b\cdot t_b}$$
$$\cos\gamma_3 = \frac{(1-m)^2\cdot c^2 + t_c{}^2 - a^2}{2\cdot(1-m)\cdot c\cdot t_c}$$

Diese Winkel werden für die weiteren Berechnungen nicht gebraucht. Sie sind hier nur der Vollständigkeit halber angegeben.

3.5.3 Teilstrecken der Teilungslinien

Nachdem nun alle Flächeninhalte und die Längen der Teilungslinien t_a, t_b und t_c berechnet sind, kann das Verhältnis der Teilstrecken jeder Teilungslinie aus dem Verhältnis von Flächeninhalten berechnet werden. Die Teilungslinien werden als Basis der beidseits anliegenden Dreiecke verwendet und die Flächen entsprechend den Teilstrecken ins Verhältnis gesetzt.

Das Dreieck BCT_B an der Teilungslinie t_b hat den Flächeninhalt $m\cdot F$.

Davon wird F_a (aus Formel 18) abgezogen und diese Differenzfläche zu $m\cdot F$ ins Verhältnis gesetzt.

Aus $\frac{b_3}{t_b} = \frac{m\cdot F - F_a}{m\cdot F} = 1 - \frac{F_a}{m\cdot F} = 1 - \frac{1}{m\cdot F}\cdot F\cdot\frac{m\cdot(1-m)}{1-m\cdot(1-m)} = 1 - \frac{1-m}{1-m\cdot(1-m)}$ ergibt sich:

Formel 23: Verhältnis der Teilstrecke 3 zur Teilungslinie

$$\frac{b_3}{t_b} = 1 - \frac{1-m}{1-m\cdot(1-m)} = \frac{m^2}{1-m\cdot(1-m)}$$

Für die anderen Teilungslinien ergibt sich dasselbe Verhältnis:

Formel 24: Verhältnis der Teilstrecken 3 zur Teilungslinie

$$\frac{a_3}{t_a} = \frac{b_3}{t_b} = \frac{c_3}{t_c} = \frac{m^2}{1-m\cdot(1-m)}$$

Daraus ergibt sich:

Formel 25: Verhältnis der Teilstrecken 1 und 2 zur Teilungslinie

$$\frac{a_1+a_2}{t_a}=\frac{b_1+b_2}{t_b}=\frac{c_1+c_2}{t_c}=1-\frac{m^2}{1-m\cdot(1-m)}=\frac{1-m}{1-m\cdot(1-m)}$$

Die einfachste Beziehung zwischen den Längen ist

Formel 26: Verhältnis der Teilstrecken 3 zu den Teilstrecken 1 und 2

$$\frac{a_3}{a_1+a_2}=\frac{b_3}{b_1+b_2}=\frac{c_3}{c_1+c_2}=\frac{m^2}{1-m}$$

Die restlichen Teilstrecken werden ebenfalls über die Flächenverhältnisse berechnet:

Formel 27: Verhältnis der Teilstrecke 1 zur Teilungslinie

$$\frac{a_1}{t_a}=\frac{b_1}{t_b}=\frac{c_1}{t_c}=\frac{F_x}{F-m\cdot F}=\frac{F_x}{F\cdot(1-m)}=\frac{m}{1-m\cdot(1-m)}$$

Die Differenz aus Formel 25 minus Formel 27 ergibt die mittlere Teilstrecke. Daraus folgt:

Formel 28: Mittlere Teilstrecken der Teilungslinien

$$\frac{a_2}{t_a}=\frac{b_2}{t_b}=\frac{c_2}{t_c}=\frac{1-2\cdot m}{1-m\cdot(1-m)}$$

Das Verhältnis aller drei Teilstrecken zueinander hängt nur von $\boldsymbol{m}$ ab, wobei $\boldsymbol{m}\leq 0{,}50$ sein muss:

Formel 29: Verhältnis der Teilstrecken zueinander

$$a_1:a_2:a_3=b_1:b_2:b_3=c_1:c_2:c_3=m:(1-2m):m^2$$

Beispiel:
Bei $\boldsymbol{m}$ **= 0,5** sind die Teilungslinien die Schwerelinien des Dreiecks, die durch den Schwerpunkt im Verhältnis 2 : 1 geteilt werden. Aus Formel 29 ergibt sich für $\boldsymbol{m}$ **= 0,5** mit dem Verhältnis der Teilstrecken **0,5 : 0 : 0,25 = 2 : 0 : 1** genau dieses Ergebnis, denn die mittlere Teilstrecke beträgt dann null.

3.6 Das innere Dreieck A'B'C'

Der Flächeninhalt F_i des inneren Dreiecks ***Di*** ist bereits aus Formel 19 und Bild 2 bekannt, er ist nur von $\boldsymbol{m}$ und dem Flächeninhalt $\boldsymbol{F}$ des Dreiecks **ABC** abhängig:

Die Lage und die Eckwinkel des inneren Dreiecks sind aus Bild 1 ablesbar:

Tabelle 3: Bezeichnungen für das innere Dreieck

Eckpunkt	Gegenseite	Eckwinkel
A'	b_2	$\gamma_1+\alpha_2$
B'	c_2	$\alpha_1+\beta_2$
C'	a_2	$\beta_1+\gamma_2$

Die Eckwinkel des inneren Dreiecks und des Dreiecks **ABC** sind **nicht identisch**.

Die Seitenlängen a_2 , b_2 , c_2 des inneren Dreiecks ergeben sich aus den hergeleiteten Verhältniswerten der Formel 28 für die mittleren Teilstrecken und den Längen t_a, t_b und t_c der Teilungslinien aus Formel 20.

Formel 30: Seitenlängen des inneren Dreiecks D_i

$$a_2 = \frac{1-2\cdot m}{1-m\cdot(1-m)}\cdot t_a$$
$$b_2 = \frac{1-2\cdot m}{1-m\cdot(1-m)}\cdot t_b$$
$$c_2 = \frac{1-2\cdot m}{1-m\cdot(1-m)}\cdot t_c$$

Da die Seitenlängen des inneren Dreiecks damit bekannt sind, kann es wie ein normales Dreieck in allen Teilen vollständig berechnet werden.

3.7 Das Dreieck $T_aT_bT_c$

3.7.1 Flächeninhalt

Der Flächeninhalt F_T des Dreiecks $T_aT_bT_c$, das sich zwischen den drei Teilungspunkten aufspannt, wird aus der Differenz zwischen der Gesamtfläche F und der Flächensumme der dadurch entstehenden äußeren Eckdreiecke $D_{EA}=T_bAT_c$, $D_{EB}=T_cBT_a$ und $D_{EC}=T_aCT_b$ gebildet.

Der Flächeninhalt f_E eines dieser äußeren Eckdreiecke wird aus deren Seitenlängen und dem Sinus des eingeschlossenen Winkels berechnet und zur Gesamtfläche ins Verhältnis gesetzt:

$$\frac{f_E}{F} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(1-m)\cdot b\cdot m\cdot c\cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha} = m\cdot(1-m)$$

Da die Seitenlängen und der Sinus sich herauskürzen, gilt die Formel allgemein für alle drei äußeren Eckdreiecke, sodass diese flächengleich sind:

Formel 31: Fläche eines Eckdreiecks

$$f_E = m\cdot(1-m)\cdot F$$

Daraus ergibt sich der Flächeninhalt F_T des Dreiecks $T_aT_bT_c$:

Formel 32: Fläche des Dreiecks $T_aT_bT_c$

$$F_T = F\cdot(1-3\cdot m\cdot(1-m))$$

3.7.2 Seitenlängen

Das Dreieck $T_aT_bT_c$ hat die Seitenlängen a_T, b_T und c_T.

Diese Seitenlängen werden mit dem Kosinussatz aus den Eckdreiecken D_{EA} , D_{EB} und D_{EC} berechnet, wobei der Kosinus aus Formel 6, Formel 7 und Formel 8 eingesetzt wird.

Formel 33: Seitenlängen des Dreiecks $T_aT_bT_c$

$$a_T = \sqrt{(1-m)^2\cdot b^2 + m^2\cdot c^2 - m\cdot(1-m)\cdot(b^2+c^2-a^2)}$$
$$b_T = \sqrt{(1-m)^2\cdot c^2 + m^2\cdot a^2 - m\cdot(1-m)\cdot(c^2+a^2-b^2)}$$
$$c_T = \sqrt{(1-m)^2\cdot a^2 + m^2\cdot b^2 - m\cdot(1-m)\cdot(a^2+b^2-c^2)}$$

4 Berechnungsbeispiel

Mit den oben angegebenen Formeln können alle wichtigen Größen von **verwandten Dreiecken** berechnet werden. Für den Gebrauch in der Praxis ist ein Programmsystem für den PC oder für einen programmierbaren Taschenrechner zweckmäßig, das nach Eingabe von ***a, b, c*** und ***m*** alle übrigen Werte auf Knopfdruck berechnet.

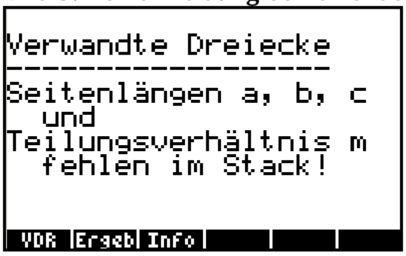
Ein entsprechendes Programmverzeichnis VDRDIR.txt für einen wissenschaftlichen HP-Taschenrechner steht auf der Praxelius-Homepage zur Verfügung. Mit diesem Programmen wird ein Berechnungsbeispiel durchgeführt.

4.1 Eingabe und Plausibilitätsprüfung

Für die Berechnung sind lediglich die Seitenlängen ***a***, ***b*** und ***c*** eines Dreiecks und das Teilungsverhältnis ***m*** erforderlich, die in den Stack des Rechners eingegeben werden müssen.

Bei leerem Stack wird nach Aufruf von [VDR] folgender Hinweis angezeigt (Bild 3):

Bild 3: Fehlermeldung bei fehlenden Eingaben

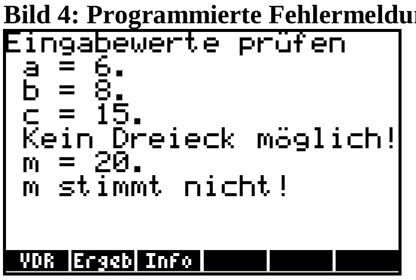


Stehen falsche oder unbrauchbare Objekte im Stack, dann stellt eine Plausibilitätsprüfung fest,

- ob die Dreiecksungleichung erfüllt ist (zwei Seiten müssen zusammen größer sein als die dritte Seite),
- ob das Teilungsverhältnis ***m*** < 1 ist,
- ob der Zahlentyp stimmt, ansonsten System-Meldung „Error: Bad Argument Type“,
- ob Objektnamen anstelle von Zahlen eingegeben wurden, dann System-Meldung „Error: Undefined Name“,
- ob ein anderer Fehler vorliegt,

und gibt z: B. folgende Meldung aus:

Bild 4: Programmierte Fehlermeldung



Für das Beispiel verwenden wir folgende Eingabewerte:

a = 20, ***b*** = 16, ***c*** = 12, ***m*** = 0,4.

Bild 5 zeigt den Bildschirm des Rechners nach der Eingabe dieser Werte in den Stack. Das Menü zeigt das Berechnungsprogramm **VDR**, das Programm **Ergeb** zur Anzeige der Ergebnisse und **Info** mit Startinformationen.

Bild 5: Eingabewerte im Stack

Nach Aufruf von **[VDR]** werden diese Daten in die Variablen ***a***, ***b***, ***c*** und ***m*** in dieser Reihenfolge übernommen.

Liegt kein Fehler vor, werden alle Werte berechnet und als Variablen im Menü gespeichert.

In allen Fehlerfällen wird eine Meldung ausgegeben. Im Menübereich sind die Variablen ***a***, ***b***, ***c*** und ***m*** vorhanden, deren Inhalt manuell überprüft werden kann, indem man sich die Werte anzeigen lässt.

4.2 Ausgabe und Ergebnisdarstellung

Bild 6: Bildschirm mit Menü

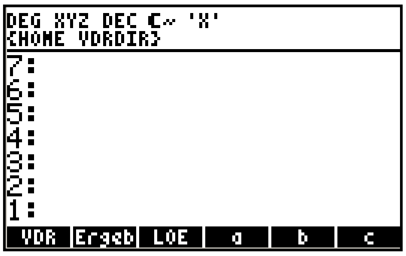


Bild 6 zeigt den Bildschirm nach Aufruf des Berechnungsprogrammes [VDR], wenn kein Eingabefehler vorliegt. Das Menü zeigt die erwähnten Variablen **[VDR]** und **[Ergeb]**. Zusätzlich sind jetzt alle 31 Variablen als Menüfelder zu sehen. **[Info]** steht jetzt als letztes Menüfeld. Mit [LOE] können alle berechneten Variablen gelöscht werden.

Man kann jetzt alle Variablen aufrufen und ansehen oder sich alle Ergebnisse mit **[↱](▼)** seitenweise auf dem Bildschirm anzeigen lassen. Mit **[NXT]** kann man zur nächsten Menüseite blättern und wieder **[↱](▼)** aufrufen.

Zur bequemen Anzeige aller Variablen ist ein Auswahlmenü **[Ergeb]** vorhanden, bei dem man den Markierungs-Cursor mit den Tasten (▲) und (▼) auf und ab bewegen kann. Drückt man bei einer markierten Zeile auf [OK], dann wird dieser Wert in den Stack geholt.

Folgende Bilder zeigen das Auswahlmenü mit allen berechneten Variablen des Beispiels. Da es 31 Variablen sind, muss das Menü in vier Bildern gezeigt werden. Der seitliche Scrollbalken zeigt, welcher Bereich des Menüs auf dem jeweiligen Bild zu sehen ist.

Bild 7: Auswahlmenü Variablen 1 bis 8

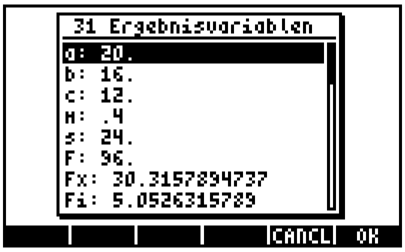


Bild 8: Auswahlmenü Variablen 9 bis 16

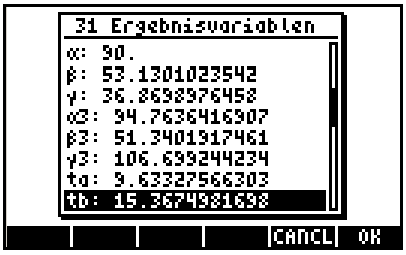


Bild 9: Auswahlmenü Variablen 17 bis 24

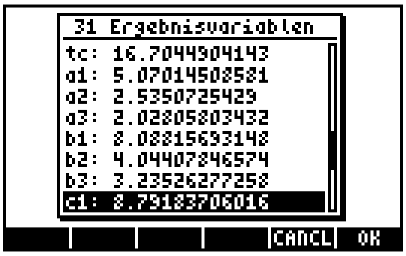
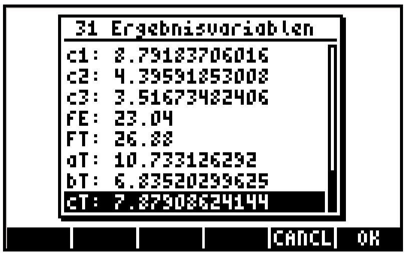


Bild 10: Auswahlmenü Variablen 24 bis 31



Die Variablenbezeichnungen stehen in Bild 1 und die Bedeutungen in Tabelle 1.

5 Anwendung im Bauwesen

5.1 Der zyklische Trägerrost

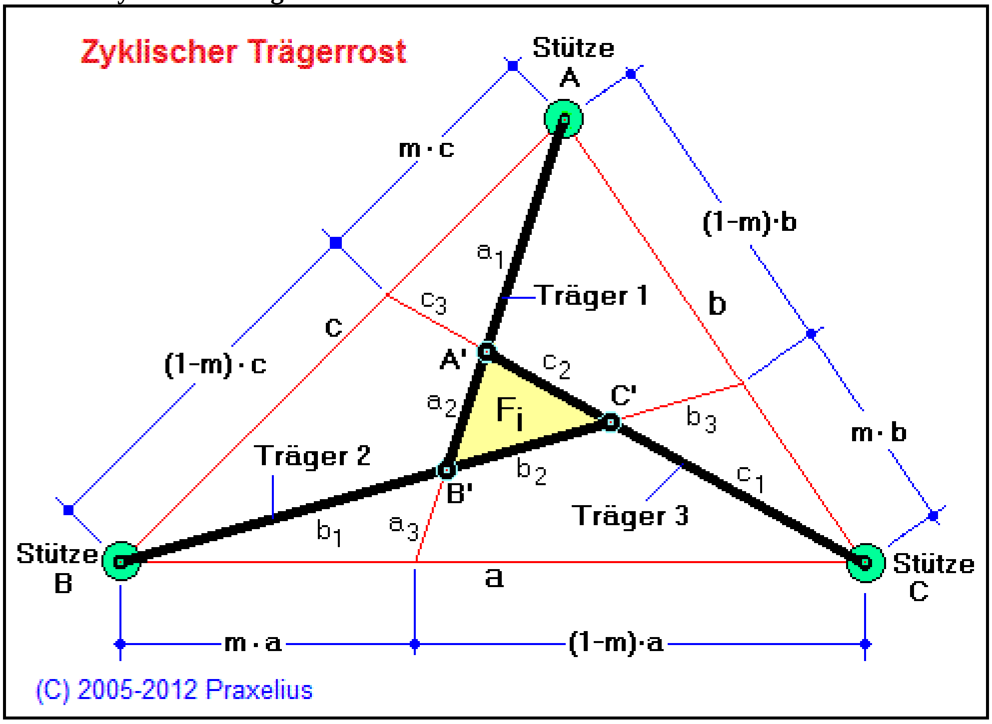
Bei polygonförmigen Raumgrundrissen ist es manchmal nötig, Podeste freitragend über zyklische Trägerroste in den Ecken aufzulagern.

Zyklische Trägerroste sind in der Baupraxis nur sinnvoll bei maximal 5 Stützen. 4 Stützen sind die Regel. 3 Stützen sind das Minimum.

Zyklische Trägerroste, die nach der Geometrie der **verwandten Dreiecke** gebaut werden, haben besondere Eigenschaften.

Bild 11 zeigt einen zyklischen Trägerrost auf 3 Stützen mit der Geometrie aus Bild 1.

Bild 11: Zyklischer Trägerrost



- **Träger 1** läuft von **Stütze A** zum Punkt **B'**, wo er durch **Träger 2** abgestützt wird.
- **Träger 2** läuft von **Stütze B** zum Punkt **C',** wo er durch **Träger 3** abgestützt wird.
- **Träger 3** läuft von **Stütze C** zum Punkt **A'**, wo er durch **Träger 1** abgestützt wird.

Bei dieser Konstruktion wird jeweils in den Punkten **A' , B'** und **C'** die Auflagerkraft des Trägers an den nächsten Träger übergeben. Dass die Träger selbst aber auf einer Seite durch die anderen Träger gehalten werden, ist der Sinn eines zyklischen Trägerrostes. In den Punkten **A', B'** und **C'** entstehen Biegemomente in den Trägern, welche die Tragwirkung bewirken. Die Fläche $\boldsymbol{F_i}$ ist das Podest, das durch diese Konstruktion getragen werden muss. Wenn $\boldsymbol{F_i}$ fest vorgegeben ist, kann über die Formel 19 das zugehörige Teilungsverhältnis $\boldsymbol{m}$ der Dreieckseiten berechnet werden.

5.2 Tragwirkung

Wirkt auf Punkt **A'** eine Einzellast $\boldsymbol{P}$ (senkrecht zur Bildebene), dann wird diese im Verhältnis $\boldsymbol{a_1/(a_1+a_2)}$ auf Punkt **B'**, von dort im Verhältnis $\boldsymbol{b_1/(b_1+b_2)}$ auf Punkt **C'** und von dort im Verhältnis $\boldsymbol{c_1/(c_1+c_2)}$ auf Punkt **A'** übertragen, wo sie zur vorhandenen Last $\boldsymbol{P}$ addiert wird. Diese neue zusätzliche Last in Punkt **A'** muss nun wieder zyklisch verteilt werden und so fort. In

Punkt **A'** kommen zu ***P*** immer kleinere Beträge hinzu, die allerdings nie Null werden. Die Gesamtsumme ***P'*** aller auf A' angreifenden Lasten wird als Grenzwert einer geometrische Reihe berechnet.

Da bei **verwandten Dreiecken** alle drei Längenverhältnisse der Träger gleich sind, ist die geometrische Reihe besonders einfach.

Der Grenzwert beträgt: $\boxed{\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P} \cdot \frac{1-\boldsymbol{m}}{1-2\boldsymbol{m}}}$.

Der Zyklus der Lastweiterleitung ist bei ***m*** **< 0,5** linksdrehend und bei ***m*** **> 0,5** rechtsdrehend. Zur Darstellung in Bild 1 und Bild 11 wurde ***m*** **= 0,4** verwendet.

So weit der Exkurs in die Statik. Es kommt ja nur auf das Prinzip an, das gezeigt werden sollte.

6 Schlusswort

Verwandte Dreiecke sind Sonderfälle von Dreiecken. Die durch Teilung eines Dreiecks erzeugten weiteren Dreiecke weisen trotz beliebiger Seitenverhältnisse des ursprünglichen Dreiecks zyklische Eigenschaften auf, die in bestimmten Anwendungsfällen von Vorteil sind (z.B. in der Statik, in der Architektur).

Bei den behandelten Dreiecken lassen sich noch weitere Zusammenhänge entdecken, die hier nicht besprochen wurden. Jedem Leser sei es überlassen, weitere Betrachtungen anzustellen.

© 2007 - 2012 Otto Praxl. Alle Rechte vorbehalten. Erstveröffentlichung dieses Beitrags am 18.12.2007 auf der Praxelius-Homepage.

7 Anhang

7.1 Bilder

7.2 Tabellen

7.3 Formeln

7.4 Sachregister (Index)