Otto Praxl

Grundlagen der Finanzmathematik

Eine kurze Einführung mit Berechnungsbeispielen.

Impressum

Verfasser:

Otto Praxl.

Internetseite:

www.praxelius.de

Veröffentlichung

Dieser Beitrag wird als PDF-E-Book auf www.praxelius.de veröffentlicht.

Layout und Gestaltung (mit Microsoft WORD™ 2007)**:**

Otto Praxl

Rechtschreibung:

Die deutsche Rechtschreibung erfolgt nach den amtlichen Regeln von 2006.
Wenn die Eindeutigkeit einer Aussage es erfordert, wird von diesen Regeln bewusst abgewichen.

Haftungsausschluss:

In diesem Beitrag können auch Fehler enthalten sein. Für evtl. Fehler und daraus resultierende Nachteile übernimmt der Verfasser keine Haftung.

Bildnachweise:

Alle Bilder stammen vom Verfasser.

Letztes Bearbeitungsdatum: 01.06.2013

Bearbeitungskennzeichen: FM-54093-009

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung 5
1.1 Ziel 5
1.2 Berechnungshilfsmittel 5
1.2.1 Vorgefertigte Tabellen 5
1.2.2 Wissenschaftliche Taschenrechner 5
1.2.3 Computerprogramme 5

2 Finanzmathematische Grundlagen 6
2.1 Abkürzungen und Formelzeichen 6
2.2 Englische Begriffe der Finanzmathematik 6
2.3 Der Zins 7
2.4 Einfache Zinsrechnung 8
2.4.1 Beispiel: Endkapital bei einfachen Zinsen 8
2.4.2 Unterjährige Zinszahlung, Tageszinsen 8
2.4.3 Beispiel: Tageszinsen 9
2.4.4 Bemerkung zur unterjährigen Zinszahlung: 9
2.5 Zinseszinsrechnung 9
2.5.1 Zinseszinsformel 9
2.5.2 Aufzinsung 10
2.5.3 Beispiel: Endkapital bei Zinseszinsen 10
2.5.4 Abzinsung 10
2.5.5 Berechnung von Laufzeit und Zinssatz 11
2.5.5.1 Laufzeit n 11
2.5.5.2 Zinssatz i 11
2.5.6 Zinseszinsrechnung bei unterjähriger Zinszahlung 11
2.5.7 Effektiver Jahreszinssatz 12
2.5.8 Grenzwert der Verzinsung 12
2.5.8.1 Beweis der Formel 12: 12
2.5.9 Vergleich mit Augenblicksverzinsung 14

3 Kapitalbildung durch Ratenzahlungen 14
3.1 Vorschüssig, nachschüssig 14
3.2 Rentenendwert, Kapitalendwert 15
3.2.1 Endwert bei vorschüssiger Ratenzahlung 15
3.2.1.1 Beispiel: Ertrag einer Lebensversicherung 15
3.2.2 Endwert bei nachschüssiger Ratenzahlung 15
3.3 Barwert 16
3.4 Barwertfaktoren 16
3.4.1 Herleitung der Formel für den Barwertfaktor b 16
3.4.1.1 Barwertfaktor für nachschüssige Zahlungen 16
3.4.1.2 Barwertfaktor für vorschüssige Zahlungen 16
3.4.2 Berechnung des Barwertes 17
3.4.3 Praktische Anwendung des Barwerts 17
3.4.3.1 Wirtschaftlichkeitsberechnung 17
3.4.3.2 Kapitalisierung von laufenden Zahlungen 18
3.4.3.3 Beispiel: Nachschüssige Zahlungen 18
3.4.3.4 Schrittweise Nachrechnung (Probe) 18
3.5 Annuität und Annuitätsfaktor 19

3.5.1 Ratenschuld ... 19
3.5.2 Annuitätenschuld ... 19
3.5.3 Beispiel: Annuität ... 20
3.5.3.1 Aufgabenstellung für Annuität ... 20
3.5.3.2 Aufgabenstellung für die Kapitalwiedergewinnung ... 20

4 Der Finanzlöser der HP-Taschenrechner ... 21
4.1 Englische Bezeichnungen ... 21
4.2 Das Prinzip ... 21
4.2.1 Berechnung über Eingabemaske ... 21
4.2.1.1 Ausfüllen der Maske ... 21
4.2.1.2 Berechnung der Werte ... 22
4.3 Berechnungen ... 22
4.3.1 Schrittweise Amortisation ... 22
4.3.2 Amortisationsstand zu einem bestimmten Jahresende ... 24
4.3.3 Berechnung über TVM-Menü ... 24
4.3.4 Die TVM-Befehle ... 25

5 Taschenrechnerprogramme ... 26
5.1 Beispiel: Zinssatz einer Lebensversicherung ... 27
5.2 Zinssatz mit dem Finanzlöser ... 28
5.3 Vorzeichen beim Finanzlöser ... 29

6 Zusammenfassung ... 29

7 Anhang ... 30
7.1 Literatur ... 30
7.2 Formelverzeichnis ... 30
7.3 Bilderverzeichnis ... 30
7.4 Tabellenverzeichnis ... 31
7.5 Sachregister (Index) ... 32

1 Einleitung

1.1 Ziel

Bei der Ausbildung in den technischen Berufen kommen die Fächer Finanzmathematik, Projektmanagement und betriebswirtschaftliche Methodik kaum vor. Diese Einführung kann deshalb den Berufsanfängern bei der wirtschaftlichen Beurteilung von Projekten eine erste Hilfe sein. Hier werden die finanzmathematischen Grundlagen kurz umrissen und Beispiele für Berechnungen und Programme angegeben. Auch der Finanzlöser der HP-Taschenrechner wird vorgestellt und seine Anwendung an Beispielen gezeigt.

1.2 Berechnungshilfsmittel

1.2.1 Vorgefertigte Tabellen

Früher, als es noch keine Taschenrechner gab, verwendete man vorgefertigte Tabellen, um Aufzinsungsfaktoren, Zinsen, Rentenendwerte, Rentenbarwerte, Annuitätsfaktoren, Laufzeiten und andere Werte nicht mühsam jedes Mal neu berechnen zu müssen.

1.2.2 Wissenschaftliche Taschenrechner

Die programmierbaren wissenschaftlichen Taschenrechner (z. B. HP 48GX, HP 49G, HP 49g+, HP 50G, TI-89, und andere) haben alle nötigen mathematischen Funktionen, um solche Werte auf Knopfdruck zu berechnen.

Zinstabellen sind nicht mehr zweckmäßig und werden nicht mehr verwendet. Die HP-Taschenrechner haben einen eingebauten Finanzlöser. Dieser löst zwar nicht die finanziellen Nöte des Anwenders, aber er erleichtert entsprechende Berechnungen. Allerdings kann nur derjenige Anwender den Finanzlöser nutzbringend einsetzen, der auch etwas von Finanzmathematik versteht.

1.2.3 Computerprogramme

Für finanzmathematische Probleme gibt es eine Fülle von Computerprogrammen für die Anwendung auf dem Windows-PC. Auch hier muss der Anwender etwas von Finanzmathematik verstehen.

2 Finanzmathematische Grundlagen

Die finanzmathematischen Berechnungen sind unabhängig von einer bestimmten Währungseinheit, gelten also für beliebige Währungseinheiten. Der Einfachheit halber verwenden wir in den Beispielen die bei uns in der europäischen Union (EU) gültige Währungseinheit EURO, Währungszeichen €.

2.1 Abkürzungen und Formelzeichen

Tabelle 1: Abkürzungen und Formelzeichen

Begriff	**Formelzeichen**	**Beschreibung**	**Bemerkung**
Währungseinheit	€	EURO	
Zinsfuß	$\boldsymbol{p}$	Währungseinheiten	auf 100 Währungseinheiten und auf ein Jahr bezogen
Zinssatz	$\boldsymbol{i = p/100 = 0{,}01 \cdot p = p\%}$	Faktor	auf ein Jahr bezogen
Aufzinsungsfaktor	$\boldsymbol{q^n = (1+i)^n}$	Faktor	auf $\boldsymbol{n}$ Jahre bezogen
Abzinsungsfaktor	$\boldsymbol{1/q^n = 1/(1+i)^n}$	Faktor	auf $\boldsymbol{n}$ Jahre bezogen
Kapital[1] (allgemein)	$\boldsymbol{K}$	Geldbetrag	€
Anfangskapital, Anfangswert, Anfangsschuld, (einfacher) Barwert	$\boldsymbol{K_0}$	Geldbetrag	€
Endkapital, Endwert	$\boldsymbol{K_n}$	Geldbetrag	€
Zinsbetrag	$\boldsymbol{Z_n}$	Geldbetrag	€
Rate	$\boldsymbol{R}$	Geldbetrag	€, alle Raten gleich
Laufzeit	$\boldsymbol{n}$	Anzahl	Zinsperioden, Raten
Annuität	$\boldsymbol{A}$	Geldbetrag	€
Annuitätsfaktor, Kapitalwiedergewinnungsfaktor	$\boldsymbol{a}$	Faktor	bezogen auf $\boldsymbol{K_0}$
Barwert vorschüssig	$\boldsymbol{Bw'}$	Geldbetrag	€
Barwert nachschüssig	$\boldsymbol{Bw}$	Geldbetrag	€
Barwertfaktor, vorschüssig	$\boldsymbol{bwf'}$	Faktor	bezogen auf $\boldsymbol{R}$
Barwertfaktor, nachschüssig	$\boldsymbol{bwf}$	Faktor	bezogen auf $\boldsymbol{R}$

2.2 Englische Begriffe der Finanzmathematik

Tabelle 2: Englische Begriffe der Finanzmathematik

Englisch	Deutsch
Interest	Zins oder Zinssatz, Abkürzung $\boldsymbol{i}$
Balance	Restschuld (sonst: Bilanz)
Payment	Rate
Principal	Tilgungsbetrag (sonst: Kapitalbetrag)
Present Value	Anfangswert (Barwert)
Future Value	Endbetrag (Zukunftswert)

[1] Mögliche Kapitalformen: Geldbetrag, Kredit, Darlehen, Schuld, Verpflichtung, Guthaben, Bankeinlage, Forderung, Hypothek, Zahlung.

2.3 Der Zins

Im Göschenbändchen (Lit. [1]) aus dem Jahre 1967 beschreibt *Prof. Dr. Marcel Nicolas*, Freie Universität Berlin, den Begriff „Finanzmathematik“ wie folgt:

> (Zitat):
> Unter „Finanzmathematik“ versteht man die Anwendung mathematischer Methoden auf die Probleme des Bank- und Kreditwesens, die einer rechnerischen Behandlung zugänglich sind. In allen diesen Problemen spielt die Erscheinung des Zinses unmittelbar oder mittelbar eine entscheidende Rolle. Seine Betrachtung bildet deshalb die Grundlage des finanzmathematischen Denkens. ...
>
> Für die Finanzmathematik ist der Zins ... der für Leihgeld zu zahlende Nutzungspreis. (Zitatende).

In der Finanzmathematik werden hauptsächlich die in der Mathematik üblichen Grundlagen der geometrischen Reihen und andere Funktionen (Potenzen, Logarithmen, usw.) verwendet. Die finanzmathematischen Formeln sind auch auf Probleme anderer Bereiche (z.B. Versicherungsmathematik, Statistik, Betriebswirtschaft) übertragbar.

Der Zins ist der Nutzungspreis (die Leihgebühr) für das geliehene Geld (Darlehen, Kredit). Man vereinbart für den geliehenen Geldbetrag (Kapital) von 100 Währungseinheiten den Preis von $\boldsymbol{p}$ Währungseinheiten als *Zinsfuß* $\boldsymbol{p}$, der für eine gewählte Zeiteinheit, die *Zinsperiode*, die meist **1 Jahr** (p.a. = *per annum* oder *pro anno*) beträgt, festgelegt ist.

Der *Zinsfuß* $\boldsymbol{p}$ ist also die Zahl der Währungseinheiten, bezogen auf 100 Währungseinheiten und für die Laufzeit von einem Jahr.

Daraus wird der *Zinssatz* $\boldsymbol{i = p/100 = 0{,}01 \cdot p = p\%}$ abgeleitet.

In der Praxis werden die beiden Begriffe *Zinsfuß* $\boldsymbol{p}$ (Währungseinheiten) und *Zinssatz* $\boldsymbol{i}$ (reine Maßzahl) meist nicht klar getrennt, manchmal sogar verwechselt oder gleichgesetzt (siehe Lit.[1], dort Seite 11, Fußnote 1).

Merkregel:
Der *Zinsfuß* $\boldsymbol{p}$ ist die Zahl der Währungseinheiten auf 100 Währungseinheiten bezogen.

Der *Zinssatz* $\boldsymbol{i = p/100 = p\% = 0{,}01 \cdot p}$ ist ein Prozentsatz. Der Zinssatz $\boldsymbol{i}$ ist zahlenmäßig 1/100 des Zinsfußes.

Die Höhe des Zinsbetrages (Zinsen $\boldsymbol{Z_n}$) hängt von der geliehenen Geldsumme (Kapital $\boldsymbol{K}$), dem Zinssatz $\boldsymbol{i}$ und der Laufzeit $\boldsymbol{n}$ in Jahren ab.

Die Zinsen sind während der gesamten Laufzeit des Kredits jeweils **am Anfang** (im Vorhinein, vorschüssig, antizipativ) oder **am Ende** (im Nachhinein, nachschüssig, dekursiv) in gleichen Zinsbeträgen zu vereinbarten Zinsterminen zu entrichten. Die Laufzeit $\boldsymbol{n}$ ist in die Zinsformeln stets in ganzzahligen Vielfachen einer Zinsperiode einzusetzen. Ist die Laufzeit kleiner als ein Jahr, dann ist proportional umzurechnen.

2.4 Einfache Zinsrechnung

Der Zinsbetrag Z_n für n Jahre Verzinsung des Kapitals K mit dem Zinssatz i ergibt sich durch die einfache Zinsformel:

Formel 1: Zinsformel für einfachen Zins

$$\boxed{Z_n = K \cdot \frac{p}{100} \cdot n = K \cdot i \cdot n},$$

wobei $i = p/100$ ist.

Das nach n Jahren Verzinsung des Kapitals K mit dem Zinssatz i erreichte Endkapital K_n berechnet man mit der Endwertformel der einfachen Zinsrechnung:

Formel 2: Endwert bei einfachem Zins

$$\boxed{K_n = K + K \cdot i \cdot n = K \cdot (1 + i \cdot n)}$$

Die einfache Verzinsung nennt man auch „lineare" Verzinsung, weil die Zinsen proportional zum Zinssatz i und zur Laufzeit n anwachsen.

2.4.1 Beispiel: Endkapital bei einfachen Zinsen

Es sollen die Zinsen (hier geht es um „einfache" Zinsen auf das Anfangskapital K, noch keine Zinseszinsen!) für folgende Verzinsung berechnet werden:

Kapital: $K = 1000$ €
Zinssatz: $i = 5\% = 0{,}05$
Laufzeit: $n = 10$ Jahre.

Die (einfachen) Zinsen betragen:
$Z_{10} = K \cdot i \cdot n = 1000 \cdot 0{,}05 \cdot 10 = 500$ €
Das Endkapital nach 10 Jahren beträgt dann:
$K_{10} = K + Z_{10} = 1000 + 500 = 1500$ €.
Oder mit der Endwertformel berechnet:
$K_{10} = K \cdot (1 + i \cdot n) = 1000 \cdot (1 + 0{,}05 \cdot 10) = 1000 \cdot 1{,}50 = 1500$ €.

2.4.2 Unterjährige Zinszahlung, Tageszinsen

Wenn es sich nicht um Sparverträge mit vereinbarter (mehrjähriger) Laufzeit, sondern um kurzfristige Einlagen handelt, dann müssen die Zinsen tageweise berechnet werden. Für die „unterjährige" Verzinsung ist in Deutschland für die Laufzeiten festgelegt:

1 Jahr = 12 Zinsmonate zu je 30 Zinstagen = 360 Zinstage.

Diese Vereinfachung war nötig, weil die Zinsen früher manuell oder mit einfachen Rechenmaschinen ausgerechnet werden mussten und auf diese Weise das Bankpersonal von den Launen unserer Zeitrechnung (verschiedene Monatslängen) befreit wurde.

Für tageweise zu berechnende Zinsen Z_d lautet die Zinsformel, wobei für die Anzahl der „Zinstage" die Bezeichnung d (days) verwendet wird:

Formel 3: Tageweise Zinsen

$$\boxed{Z_d = K \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{360} = K \cdot i \cdot \frac{d}{360}}$$

2.4.3 Beispiel: Tageszinsen

Kapital: $\boldsymbol{K} = 1000$ €
Zinssatz $\boldsymbol{i} = 5\% = 0{,}05$
Laufzeit: vom 05.05.2001 bis 07.12.2001

Berechnung der Laufzeit in Zinstagen:
05.05. bis 05.12. = 7 Monate zu 30 Tagen = 210 Tage
06.12. und 07.12 = 2 Tage
insgesamt 210 + 2 = 212 Tage; $\boldsymbol{d} = 212$.
$\boldsymbol{Z_d} = \boldsymbol{Z_{212}} = 1000 \cdot 0{,}05 \cdot 212/360 = 29{,}44$ €

Ist die Tageszahl des Endtermins niedriger als die Tageszahl des Laufzeitbeginns, dann rechnet man bei der Ermittlung der Zinstage die Tage des letzten Monats zum Vormonat:

Für 25.05.2001 bis 12.10.2001 rechnet vom 25.05. bis (30.9. + 12 Tage[2] = 42.9.) = 25.5. bis 42.09. = 4 Monate · 30 + (42-25) = 120 + 17 = 137 Tage.

2.4.4 Bemerkung zur unterjährigen Zinszahlung:

In angelsächsischen Ländern wird mit der tatsächlichen Monatslänge gerechnet, jedoch mit einem Jahr einheitlicher Länge von 365 Tagen (das Schaltjahr wird nicht berücksichtigt).

Wenn im EU-Ausland kurzfristige Kredite aufgenommen werden oder Geld angelegt wird, dann ist zu berücksichtigen, dass dort die Anzahl der Zinstage anders als in Deutschland berechnet wird. Es ist zu empfehlen, vorher die Bank zu fragen.

Im Computerzeitalter ist aber die Vereinfachung der Berechnung kein Argument mehr, so dass eine Vereinheitlichung zu erwarten ist.

2.5 Zinseszinsrechnung

Zinseszinsen sind gemäß **§ 248 BGB** [3], Absatz 1, verboten.

Dort heißt es: „Eine im voraus getroffene Vereinbarung, dass fällige Zinsen wieder Zinsen tragen sollen, ist nichtig".

Eine Ausnahme lässt der Satz 1 des Absatzes 2 des **§ 248 BGB** für Sparkassen, Kreditanstalten und Banken zu: „Sparkassen, Kreditanstalten und Inhaber von Bankgeschäften können im Voraus vereinbaren, dass nicht erhobene Zinsen von Einlagen als neue verzinsliche Einlagen gelten sollen." Er ist die Hauptgeschäftsgrundlage der Banken und Sparkassen.

Bei verzinslich angelegten Geldbeträgen (Sparverträgen, Sparbüchern) werden die Zinsen nicht regelmäßig ausbezahlt, sondern nach Ablauf des Jahres dem verzinsten Kapital zugeschlagen und im nächsten Jahr mitverzinst. Weil die Zinsen auf diese Weise wieder verzinst werden, spricht man von **Zinseszinsen**.

2.5.1 Zinseszinsformel

Herleitung der Zinseszinsformel
(der Multiplikationspunkt ist entbehrlich, wird aber der Deutlichkeit halber hier verwendet).

Es gilt zur Vereinfachung der Formeln: $\boldsymbol{q} = 1 + \boldsymbol{i}$

---

[2] Hier wird die Tageszahl eines Monats einfach weitergezählt.
[3] BGB = Bürgerliches Gesetzbuch

Anfangskapital K_0 am Beginn des 1. Jahres.

Endkapital am Ende des 1. Jahres bzw. Anfang des 2. Jahres:
$K_1 = K_0 + K_0 \cdot i = K_0 \cdot (1+i) = K_0 \cdot q$.

Endkapital am Ende des 2. Jahres bzw. Anfang des 3. Jahres:
$K_2 = K_1 + K_1 \cdot i = K_1 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = K_0 \cdot q^2$.

Endkapital am Ende des 3. Jahres bzw. Anfang des nächsten Jahres:
$K_3 = K_2 + K_2 \cdot i = K_2 \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) \cdot (1+i) = K_0 \cdot q^3$

Endkapital am Ende des n-ten Jahres:
$K_n = K_{n-1} + K_{n-1} \cdot i = K_{n-1} \cdot (1+i) = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n$

Ein Anfangskapital K_0 wächst nach n Zinsperioden mit dem Zinssatz i und der jeweiligen Wiederverzinsung der aufgelaufenen Zinsen auf das Endkapital K_n an, dabei gilt $q = 1 + i$:

Formel 4: Endkapital bei Zinseszinsen

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n}$$

2.5.2 Aufzinsung

Den Faktor $\boxed{K_n/K_0 = q^n = (1+i)^n}$ nennt man **Aufzinsungsfaktor**. Er gibt an, auf welches Vielfache das Anfangskapital nach n Zinsperioden (am Ende des n-ten Jahres) mit dem Zinssatz i und der jeweiligen Wiederverzinsung der aufgelaufenen Zinsen angewachsen ist.

Wenn die y^x-Funktion des Taschenrechners zur Berechnung des Aufzinsungfaktors benutzt wird, dann sind die (früher notwendigen) Aufzinsungstabellen entbehrlich.

2.5.3 Beispiel: Endkapital bei Zinseszinsen

Berechnung der Zinseszinsen für das Beispiel unter 2.4.1:

Kapital: K_0 = 1000 €
Zinssatz: i = 5% = 0,05; $q = 1 + i$ = 1,05
Laufzeit: n = 10 Jahre.

Die Endkapital beträgt einschließlich Zinseszinsen:
K_{10} = 1000 · 1,05^{10} = 1000 · 1,62889 = 1628,89 €,
(gegenüber 1500 € bei einfachem Zins).

2.5.4 Abzinsung

Mit der Zinseszinsformel in der ursprünglichen Form wird durch Multiplikation des Anfangskapitals mit dem Aufzinsungsfaktor das Endkapital berechnet.

Mit der umgestellten Formel lässt sich berechnen, welches Anfangskapital (**Barwert**) verzinslich angelegt werden muss, um ein bestimmtes Endkapital zu erreichen. Dazu muss man dieses vorgegebene Endkapital **abzinsen** (diskontieren)**,** indem man es durch den Aufzinsungsfaktor teilt. Der zum Abzinsen verwendete Zinssatz i wird auch **Diskontsatz** genannt.

Formel 5: Abzinsungsformel

$$\boxed{K_0 = \frac{K_n}{q^n} = K_n \cdot q^{-n} = K_n \cdot \frac{1}{(1+i)^n}}$$

Formel 6: Abzinsungsfaktor

$$\frac{K_0}{K_n} = q^{-n} = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

Der Faktor K_0/K_n wird **Abzinsungsfaktor** genannt. Er ist der Kehrwert des Aufzinsungsfaktors. Auch hierfür gab es früher Tabellen, die nun dank der Taschenrechner-funktionen y^x und **1/*x*** entbehrlich sind.

Bei der einfachen Verzinsung ist der Abzinsungsfaktor $K_0/K_n = 1/(1 + i \cdot n)$, wie man aus obiger Endwertformel (Formel 2) der einfachen Zinsrechnung leicht ermitteln kann.

2.5.5 Berechnung von Laufzeit und Zinssatz

Durch Umstellung der Zinseszinsformel kann auch die Laufzeit ***n*** oder der Zinssatz ***i*** aus den übrigen Größen berechnet werden.

2.5.5.1 Laufzeit n

Formel 7: Berechnung der Laufzeit

$$q^n = (1+i)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

$$n \cdot \log(q) = n \cdot \log(1+i) = \log\left(\frac{K_n}{K_0}\right)$$

$$n = \frac{\log(K_n/K_0)}{\log(q)} = \frac{\log(K_n/K_0)}{\log(1+i)}$$

Hier wird willkürlich der dekadische Logarithmus **log** *gewählt. Man kann auch den natürlichen Logarithmus* **ln** *bei der Herleitung der Formel verwenden.*

2.5.5.2 Zinssatz i

Formel 8: Berechnung des Zinssatzes

$$q^n = (1+i)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

2.5.6 Zinseszinsrechnung bei unterjähriger Zinszahlung

Es ist auch möglich, anstelle der jährlichen Verzinsung eine kürzere Zinsperiode zu wählen, z.B. halbjährlich oder monatlich, wobei nach Ablauf der Zinsperiode die Zinsen berechnet und zum verzinsenden Kapital addiert (zugeschlagen) werden. Ab diesem Zeitpunkt werden die Zinsen mitverzinst.

Dies führt zu einem größeren Endwert als bei jährlicher Zinszahlung.

Meist werden Zinsperioden für die Länge des ***m***-ten Teiles eines Jahres vereinbart. Für die halbjährliche Zinszahlung (Zinszuschlag) gilt $m = 2$ und für die monatliche $m = 12$. Die Laufzeit ***n*** wird nach wie vor in Jahren angegeben.

In ***n*** Jahren gibt es dann $m \cdot n$ Zinsperioden. Ist ***i*** der nominelle Jahreszinssatz, so ist der auf die Zinsperiode bezogene effektive Zinssatz gleich i/m .

Die Zinseszinsformel für unterjährige Zinszahlung lautet dann:

Formel 9: Unterjährige Zinszahlung

$$\boxed{K_{mn} = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}$$

Durch Umstellung dieser Formel können dann Barwerte, Laufzeit und effektiver Zinssatz aus den anderen Größen ermittelt werden. Der Leser möge diese Formelumstellungen selber vornehmen.

2.5.7 Effektiver Jahreszinssatz

Bei unterjähriger Zinszahlung müssen pro Jahr mehr Zinsen gezahlt werden, als sich aus dem jährlichen (nominellen) Zinssatz $\boldsymbol{i}$ ergibt. Der aus unterjähriger Zinszahlung auf das Jahr bezogene Zinssatz wird *effektiver* oder *wirklicher* Zinssatz $\boldsymbol{i'}$ genannt. Er wird aus Formel 9 hergeleitet, wenn $\boldsymbol{n} = 1$ ist:

Formel 10: Aufzinsungsfaktor q_m für n=1 und m Zinsperioden pro Jahr

$$\boxed{q_m = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}}.$$

Formel 11: Effektiver Jahreszinssatz

$$\boxed{i' = q_m - 1 = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1}$$

Beispiel:

> Wird bei einem jährlichen Zinssatz $\boldsymbol{i}$ von 6% der Zins monatlich ($\boldsymbol{m}$ = 12) berechnet, so ergibt sich ein monatlicher Zinssatz von 0,5% mit einer Laufzeit von 12 Monaten: Der Aufzinsungsfaktor für 1 Jahr beträgt dann:
>
> $$i' = q_m - 1 = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1 = \left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12} - 1 = 1{,}005^{12} - 1 = 0{,}\mathbf{06167781186}.$$
>
> Der effektive Jahreszinssatz beträgt dann 0,06167781186 ≈ 6,17%.

2.5.8 Grenzwert der Verzinsung

Bei extrem kurzer Zinsperiode, wenn $\boldsymbol{m}$ in Formel 10 nach unendlich strebt (*kontinuierliche Verzinsung* oder *Augenblicksverzinsung* genannt), ergibt sich der Grenzwert des erreichbaren Endwerts $\boldsymbol{K'_n}$ nach $\boldsymbol{n}$ Jahren:

Formel 12: Kontinuierliche Verzinsung

Für $m \to \infty$ gilt: $\boxed{K'_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} = K_0 \cdot e^{i \cdot n}}$

2.5.8.1 Beweis der Formel 12:

Nach Definition der Mathematiker hat das Binom $\boxed{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}}$ den Grenzwert **e**, wenn $\boldsymbol{m} \to \infty$ gilt.

Mathematisch ausgedrückt durch:

Formel 13: Grenzwert e

$$\mathbf{e} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m .$$

Für den Grenzwert **e** kann eine binomische Reihe entwickelt werden, die konvergent zu **e** ist:

Formel 14: Binomische Reihe für den Wert e

$$\mathbf{e} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

Mit 12 Summanden erhält man mit dieser Reihe die Zahl **e** auf 12 signifikante Stellen:
e = 2,71828182846, wie sie auch der Taschenrechner im Normalfall ausgibt.

e ist eine irrationale Zahl mit unendlich vielen Kommastellen. Mit einem HP-Taschenrechner und der LONGFLOAT-Library (LIB 902)[4] von *Gjermund Skailand* wurden 50 Kommastellen für **e** berechnet:

e = 2,71828 18284 59045 23536 02874 71352 66249 77572 47093 69996.

e wird als Basis des natürlichen Logarithmus (**ln** = logarithmus naturalis) verwendet und als Wachstumskonstante **e** bezeichnet.

Für den Beweis der Formel 12 brauchen wir aber den Grenzwert $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^m$, den wir noch nicht kennen. Wir formen den mathematischen Ausdruck für diesen Grenzwert um, wobei $m/i = z$ gesetzt wird, und erhalten:

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^m = \lim_{\left[\frac{m}{i}\right]\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left[\frac{m}{i}\right]}\right)^{\left[\frac{m}{i}\right]\cdot i} = \left[\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right]^i = \mathbf{e}^i .$$

Dies ist der Aufzinsungsfaktor q_m der Augenblicksverzinsung für 1 Jahr.

Für n Jahre ergibt sich bei $m\to\infty$ und dem nominellen Zinssatz i der Aufzinsungsfaktor der Augenblicksverzinsung:

$$q_m{}^n = \mathbf{e}^{i\cdot n}$$

Daraus ergibt sich die (hier abgekürzte) Formel 12, die zu beweisen war:

Formel 15: Augenblicksverzinsung

$$K'_n = K_0 \cdot \mathbf{e}^{i\cdot n}$$

In Lit.[1], Seite 47, ist ein etwas längerer Beweis der Augenblicksverzinsung zu finden, der auch noch die Herleitung der binomischen Reihe für den Wert **e** enthält.

[4] Zu finden im Internet unter www.hpcalc.org.

2.5.9 Vergleich mit Augenblicksverzinsung

Kapital $\boldsymbol{K_0}$ = 1000 €
Zinssatz $\boldsymbol{i}$ = 0,05 = 5%
Laufzeit $\boldsymbol{n}$ = 10 Jahre.
Die Berechnung soll für jährlichen ($\boldsymbol{m}$ = 1), monatlichen ($\boldsymbol{m}$ = 12) und täglichen ($\boldsymbol{m}$ = 360) Zinszuschlag und für die Augenblicksverzinsung durchgeführt werden.

Jährlicher Zinszuschlag: $\boldsymbol{m}$ =1:
$\boldsymbol{K_{10}} = 1000 \cdot 1{,}05^{10} = 1628{,}89$ € (wie oben unter 2.5.3).

Monatlicher Zinszuschlag: $\boldsymbol{m}$ = 12:
$\mathbf{K_{12\cdot10}} = 1000 \cdot (1+ 0{,}05/12)^{12\cdot10} = 1647{,}01$ €

Täglicher Zinszuschlag: $\boldsymbol{m}$ = 360:
$\mathbf{K_{360\cdot10}} = 1000 \cdot (1+ 0{,}05/360)^{360\cdot10} = 1648{,}66$ €.

Grenzwert bei Augenblicksverzinsung: $\boldsymbol{m} \to\infty$:
$\boldsymbol{K'_{10}} = 1000 \cdot \mathbf{e}^{0{,}05\cdot10} = 1648{,}72$ €.

3 Kapitalbildung durch Ratenzahlungen

Aus der Verkürzung der Zinsperioden resultieren besondere Begriffe und damit verbundene Methoden. Auch die nachfolgenden Formeln für Rentenberechnung und die daraus zu ermittelnden Barwerte können für verkürzte Zinsperioden abgeleitet werden. Hier in dieser Einführung werden diese Besonderheiten nicht behandelt.

Alle oben abgeleiteten Formeln beziehen sich auf ein einziges festes Kapital $\boldsymbol{K}$.

Kapitalbildung erfolgt aber meist über regelmäßige Einzahlungen, die sich im Laufe der Zeit mit Zins und Zinseszins zu einem Endwert $\boldsymbol{K_n}$ summieren.

Unter **„Rente“** versteht man in der Finanzmathematik eine verzinsliche Zahlung, die in mehreren Teilbeträgen, den Rentenraten $\boldsymbol{R_1}$ bis $\boldsymbol{R_n}$, erfolgt.

Meist gilt die Voraussetzung, dass die einzelnen Raten gleich sein sollen:
$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R_2} = \ldots = \boldsymbol{R_n}$.

3.1 Vorschüssig, nachschüssig

Die Ratenzahlungen $\boldsymbol{R}$ können entweder am Anfang (vorschüssig) oder am Ende (nachschüssig) jeder Zinsperiode erfolgen.

Bei der nachschüssigen Rente erfolgt die erste Zahlung am Ende der 1. Zinsperiode, wirkt sich also erst ab Beginn der 2. Zinsperiode bei den Zinsen aus. Die letzte Ratenzahlung erfolgt am Ende der Laufzeit und hat auf die Zinsen keinen Einfluss mehr. Diese Form wird bei **Abzahlung von Krediten** verwendet, bei der Zins- und Tilgungsbeträge jeweils am Ende der Zinsperiode bezahlt werden.

Bei Sparverträgen, Versicherungsverträgen und anderen Kapitalbildungsformen werden die Raten vorschüssig bezahlt. Jede Rate wird am Beginn der Zinsperiode eingezahlt und ab diesem Zeitpunkt verzinst. Die letzte Rate wird am Beginn der letzten Zinsperiode eingezahlt und bis zum Ende der Laufzeit verzinst.

3.2 Rentenendwert, Kapitalendwert

3.2.1 *Endwert bei vorschüssiger Ratenzahlung*

Die Herleitungen der Formel 16 und Formel 17 werden hier nicht gezeigt, es handelt sich um geometrische Reihen, die im Mathematikunterricht der Schulen behandelt werden.

Wenn man $\boldsymbol{n}$ Jahre lang am Anfang jeden Jahres (vorschüssig) den gleichen Betrag $\boldsymbol{R}$ einzahlt, so erreicht man am Ende des $\boldsymbol{n}$-ten Jahres nach Verzinsung mit dem Zinssatz $\boldsymbol{i}$ (wobei gilt: $\boldsymbol{q} = \mathbf{1}+\boldsymbol{i}$) folgenden Endwert:

Formel 16: Kapitalendwert bei vorschüssiger Ratenzahlung

$$K_n = R \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = R \cdot (1 + i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Diese Formel wird z. B. für die Berechnung der Auszahlungssumme einer Lebensversicherung verwendet. Am Anfang jedes Jahres werden die Prämien eingezahlt, die sich über $\boldsymbol{n}$ Jahre verzinslich ansammeln. Am Ende wird eine Summe ausgezahlt, die sich aus Versicherungssumme und Kapitalertrag zusammensetzt. Wenn man den Zinssatz kennt, der wegen des Risikoabschlags etwas kleiner als die bankübliche Verzinsung ist, kann man die voraussichtliche Auszahlungssumme zum Ende der Laufzeit selbst berechnen.

3.2.1.1 *Beispiel: Ertrag einer Lebensversicherung*

Ein anfangs 30-jähriger Versicherungsnehmer zahlt 35 Jahre lang am Anfang jedes Jahres 600 € in seine Lebensversicherung ein. Er schätzt den Zinssatz auf 6 %. (Die vertragliche Versicherungssumme beträgt 600 · 35 = 21000 €).

Er rechnet sich für seinen 65. Geburtstag folgende Auszahlungssumme aus, die sich aus der Versicherungssumme und dem Kapitalertrag zusammensetzt:

$\boldsymbol{K_n} = 600 \cdot 1{,}06 \cdot (1{,}06^{35} - 1) / 0{,}06 = 600 \cdot 118{,}12087 = \mathbf{70872{,}52}$ **€**

Der Zinssatz wird jedoch in den Versicherungsverträgen nicht angegeben, so dass man ihn später aufgrund der angekündigten oder tatsächlichen Auszahlungssumme selbst ermitteln muss (siehe Beispiel unter 5.1).

3.2.2 *Endwert bei nachschüssiger Ratenzahlung*

Wenn man $\boldsymbol{n}$ Jahre lang am Ende jeden Jahres (nachschüssig) den gleichen Betrag $\boldsymbol{R}$ einzahlt, so erreicht man am Ende des $\boldsymbol{n}$-ten Jahres nach Verzinsung mit dem Zinssatz $\boldsymbol{i}$ (wobei gilt: $\boldsymbol{q} = \mathbf{1}+\boldsymbol{i}$) folgenden Endwert:

Formel 17: Endwert (nachschüssig)

$$K_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = R \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Zur Berechnung der Laufzeit $\boldsymbol{n}$ aus den übrigen gegebenen Daten müssen die Formeln umgestellt werden. Dies wird hier nicht gezeigt.

Soll der Zinssatz $\boldsymbol{i}$ aus den übrigen gegebenen Daten berechnet werden (wie z. B. für den Ertrag einer Lebensversicherung, siehe Beispiel unter 3.2.1.1 und 5.1), so führt die Umstellung der Formel 16 und Formel 17 zu nicht elementar (nicht mit Papier und Bleistift) lösbaren Gleichungen höheren Grades. Diese müssen iterativ gelöst werden. Dafür gibt es Taschenrechnerprogramme und den Finanzlöser.

3.3 Barwert

Das Ergebnis der Abzinsung, also den Betrag, den man anfangs zur Verfügung stellen muss, um das angegebene Endkapital durch Verzinsung nach einer vorgegebenen Zeit zu erzielen, nennt man **Barwert**.

Bei einem fest vorgegebenen Endkapital lässt sich der Barwert durch einmalige Abzinsung mit q^{-n} berechnen (siehe Formel 6). Schwieriger wird die Berechnung des Barwerts, wenn regelmäßige Zahlungen (Raten), die nach bestimmter Zeit mit Zins und Zinseszinsen zu einem Endbetrag auflaufen werden, bereits anfangs durch einen einmaligen Betrag (den Renten-Barwert) abgelöst werden sollen.

Zur Unterscheidung vom (einfachen) Barwert K_0 eines einzigen abgezinsten Betrages wird hier in diesem Beitrag der aus regelmäßigen Ratenzahlungen zu ermittelnde (Renten-)Barwert mit dem Formelzeichen ***Bw*** bezeichnet.

3.4 Barwertfaktoren

Der Barwertfaktor ***bwf*** für nachschüssige Zahlungen gibt an, welches Vielfache der Rate man als Anfangskapital (Barwert ***Bw***) anlegen muss, um die regelmäßigen nachschüssigen Zahlungen der ***n*** Raten nach Verzinsung mit dem Zinssatz ***i*** zu den Fälligkeitszeitpunkten damit abzudecken (zu kapitalisieren).

Wenn vorschüssige Zahlungen geleistet werden sollen, ist der Barwertfaktor ***bwf'*** zu verwenden.

3.4.1 Herleitung der Formel für den Barwertfaktor b

Der Barwertfaktor ***bwf*** für ***n*** gleiche Raten ***R*** bei einer Verzinsung mit dem Zinssatz ***i*** ist die **Summe der Abzinsungsfaktoren** für die Zahlungen der Jahre 1 bis ***n***.

Weil es sich um gleiche Raten ***R*** handelt, kann man für den Barwertfaktor eine geschlossene Formel angeben.

3.4.1.1 Barwertfaktor für nachschüssige Zahlungen

Der **Barwertfaktor *bwf* für nachschüssige Ratenzahlungen** ist am gebräuchlichsten. Als Grundlage werden Formel 17, Formel 20 und Formel 22 mit $q = 1 + i$ verwendet.

$$Bw = bwf \cdot R$$

$$K_n = Bw \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \Rightarrow bwf \cdot R \cdot (1+i)^n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \Rightarrow bwf \cdot q^n = \frac{q^n - 1}{q-1}$$

Daraus ergibt sich:

Formel 18: Barwertfaktor (nachschüssig)

$$bwf = \frac{q^n - 1}{q^n \cdot (q-1)} = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i}$$

3.4.1.2 Barwertfaktor für vorschüssige Zahlungen

Da vorschüssige Zahlungen am Beginn der Zinsperiode bezahlt und in derselben Zinsperiode noch mitverzinst werden, ist die Verzinsung um den Faktor $q = 1 + i$ höher als bei nachschüssigen Zahlungen.

Der Barwertfaktor ***bwf'*** für vorschüssige Zahlungen ist deshalb:

Formel 19: Barwertfaktor (vorschüssig)

$$\boxed{bwf\,' = q \cdot bwf}$$

3.4.2 Berechnung des Barwertes

Da der Barwert und nach Auszahlung der jeweiligen Rate der verbleibende Restbetrag so lange weiter verzinst wird, bis er aufgezehrt ist, muss man weniger als n Raten anlegen, weil die Zinsen mit ausbezahlt werden. Es muss also gelten: $bwf < n$ und $bwf' < n$.

Nachschüssiger Barwert:

Formel 20: Barwert (nachschüssig)

$$\boxed{Bw = bwf \cdot R}$$

Vorschüssiger Barwert:

Formel 21: Barwert (vorschüssig)

$$\boxed{Bw' = bwf\,' \cdot R}$$

Auszahlung von n Raten:

Formel 22: Auszahlung in Raten

$$\boxed{K_n = n \cdot R}$$

Die Differenz zwischen Barwert Bw und Endwert K_n ist der Zinsbetrag Z, der durch die Kapitalisierung der Raten erzielt wird.

Formel 23: Zinsbetrag (nachschüssig)

$$\boxed{Z = (n - bwf) \cdot R}$$ bzw.

Formel 24: Zinsbetrag (vorschüssig)

$$\boxed{Z = (n - bwf\,') \cdot R}$$

3.4.3 Praktische Anwendung des Barwerts

Der Barwert wird nicht nur benötigt, wenn man den Betrag ermitteln will, den man heute anlegen müsste, um nach einer gewissen Zeit durch Verzinsung einen angestrebten Wert zu erreichen, sondern auch dann, wenn eine zu einem späteren Zeitpunkt fällige Forderung vorzeitig abgelöst werden soll.

In diesem Fall wird der Schuldner (Käufer) die Forderung um die noch bis zum Fälligkeitszeitpunkt zu erwartenden Zinsen kürzen, die ja nun dem Gläubiger zufließen, weil er das Geld früher zurückbekommen hat. Bei Geschäften mit Wechseln wird der **Wechsel** als Zahlungsversprechen wie Bargeld gehandelt. Falls er vor dem Fälligkeitszeitpunkt verkauft wird, muss er entsprechend abgezinst (diskontiert) und zum Barwert der Wechselsumme verkauft werden.

3.4.3.1 Wirtschaftlichkeitsberechnung

Bei Wirtschaftlichkeitsberechnungen zur Beurteilung der verschiedenen Varianten von Baumaßnahmen oder Anschaffungen müssen die zu verschiedenen Zeitpunkten zu zahlenden Geldbeträge wertmäßig miteinander verglichen werden können, um die wirtschaftlichste Lösung herauszufinden.

Um die Varianten vergleichen zu können, müssen die Beträge zunächst durch entsprechendes Auf- oder Abzinsen auf ein und denselben Zeitpunkt bezogen werden. Dieser Vergleichszeitpunkt kann beliebig gewählt werden, da bei gleichem Zinssatz das Verhältnis der Zeitwerte in jedem beliebigen Zeitpunkt das gleiche ist.

Meist jedoch werden alle Werte auf den gleichen Anfangszeitpunkt (Zeitpunkt der Finanzierung) bezogen, aus deren Summe sich dann der Barwert ergibt.

Um unterschiedliche Beträge, die noch dazu zu unterschiedlichen Zeiten fällig sein können, abzuzinsen, legt man eine Tabelle an (Tabellenkalkulation!), weil in diesem Fall der Barwert nicht durch eine geschlossene Formel ermittelt werden kann. Hierbei können auch unterschiedliche Zinssätze für einzelne Beträge berücksichtigt werden, wenn die Konditionen verschiedener Banken zusätzlich verglichen werden sollen.

3.4.3.2 Kapitalisierung von laufenden Zahlungen

Bei der Finanzierung von Projekten muss man berücksichtigen:

- Herstellungskosten, die kurz nach Fertigstellung zu bezahlen sind, und
- regelmäßige laufende Kosten, die erst im Laufe der Nutzungsdauer von n Jahren auftreten.

Da die laufenden Kosten (z. B. Kosten für regelmäßige vorgeschriebene Wartung) erst später zu bezahlen sind, müssen sie kapitalisiert werden, indem der Barwert ermittelt und mitfinanziert wird.

3.4.3.3 Beispiel: Nachschüssige Zahlungen

Eine Person hat sich verpflichtet, einer anderen Person 5 Jahre (n = 5) lang am Ende jedes Jahres 1000 € (R = 1000) zu bezahlen. Welcher Betrag (***Bw***) muss verzinslich mit einem Zinssatz von 5% (i = 0,05) zu Beginn des 1. Jahres angelegt werden, damit aus dem angelegten Betrag und den daraus resultierenden Zinserträgen diese Verpflichtung erfüllt werden kann?

Es handelt sich um nachschüssige Zahlungen.

Der Barwertfaktor wird mit den Werten $q = 1 + i = 1{,}05$ und $n = 5$ berechnet:

bwf $= (1{,}05^5 - 1) / (1{,}05^5 \cdot 0{,}05) = 4{,}32948$.

Der Barwert ist ***Bw*** = 1000 · 4,32948 = **4329,48 €.**

3.4.3.4 Schrittweise Nachrechnung (Probe)

Hier werden zur Anschauung die einzelnen Zahlungen sowie Zinsen und Restbetrag schrittweise verfolgt und in der Tabelle 3 für jedes Jahr aufgelistet.

Tabelle 3: Proberechnung einer nachschüssigen Zahlung

	Zu Jahresbeginn	am Jahresende		
Jahr	***Bw*** oder Restbetrag €	+ 5% Zinsen €	-Auszahlung €	Restbetrag €
1.	***Bw*** = **4329,48**	+ 216,47	-1000	3545,95
2.	3545,95	+ 177,30	-1000	2723,25
3.	2723,25	+ 136,16	-1000	1859,41
4.	1859,41	+ 92,97	-1000	952,38
5.	952,38	+ 47,62	-1000	0,00
	Summen:	664,52	5000	

Der Barwert 4329,48 € und die Zinsen 664,52 € ergeben zusammen die ausgezahlte Summe von 5000 €. Die nach Tabelle ermittelten Zinsen ergeben sich auch nach der Formel 23:

$(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{bwf}) \cdot \boldsymbol{R} = (5 - 4{,}32948) \cdot \boldsymbol{R} = 0{,}66452 \cdot \boldsymbol{R} = 664{,}52$ €

3.5 Annuität und Annuitätsfaktor

Bei der Abzahlung (Amortisation) von Krediten kann man zwei Wege wählen:

3.5.1 Ratenschuld

Die jährliche Zahlung setzt sich aus einer gleichbleibenden Tilgungsrate (Tilgungsquote) und den Zinsen auf den Schuldrest, der zum Zahlungstermin noch vorlag, zusammen. Da durch jeden Tilgungsbetrag die restliche Schuld kleiner wird, sind jährlich kleiner werdende Zinsbeträge zu zahlen. Diese Zahlungsweise ist für den Schuldner umständlich, weil er genau Buch führen muss, um die Höhe der nächsten Zahlung zu ermitteln.

3.5.2 Annuitätenschuld

Einfacher ist es, jährlich einen gleichbleibenden Betrag $\boldsymbol{A}$ zu zahlen, der sich ebenfalls aus der Tilgung und den Zinsen auf den Schuldrest zusammensetzt. Da die Schuld im Laufe der Zeit kleiner wird, nimmt der Anteil der Zinsen ab und die Tilgungsquote steigt entsprechend an. Bei dieser Zahlungsweise nennt man den gleichbleibenden Betrag $\boldsymbol{A}$ **Annuität.**

Kann man bei der Ratenschuld die Rückzahlungsbeträge noch mit einfachen Rechenvorgängen (4 Grundrechenarten) ermitteln, werden zur Berechnung der Annuität Potenzrechnung und geometrische Reihen angewandt.

Für die Berechnung gilt folgende Voraussetzung:

Damit die gestellte Bedingung der Annuitätenschuld erfüllt ist, muss der Zeitwert aller Annuitäten $\boldsymbol{A}$ zu Beginn gleich der Anfangsschuld $\boldsymbol{K_0}$ sein. Die Annuitäten $\boldsymbol{A}$ können also als Raten einer $\boldsymbol{n}$-mal zahlbaren **nachschüssigen** Rente aufgefasst werden, deren Barwert gleich $\boldsymbol{K_0}$ zu setzen ist:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{bwf} = \boldsymbol{K}_0$$

Man erhält daraus die Beziehung

$\boxed{\boldsymbol{A} = \frac{1}{\boldsymbol{bwf}} \cdot \boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{K}_0}$, wobei $\boxed{\boldsymbol{a} = \frac{1}{\boldsymbol{bwf}}}$ der **Annuitätsfaktor** ist, der im betriebswirtschaftlichen Bereich auch **Kapitalwiedergewinnungsfaktor** genannt wird. Die Formel wird hier angegeben, die Herleitung wird nicht gezeigt.

Formel 25: Annuität A und Annuitätsfaktor a

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{K}_0$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{\boldsymbol{bwf}} = \frac{\boldsymbol{i} \cdot (1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}}}{(1+\boldsymbol{i})^{\boldsymbol{n}} - 1} = \frac{(\boldsymbol{q}-1) \cdot \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}} - 1}$$

Der Annuitätsfaktor $\boldsymbol{a}$ ist also der Kehrwert des (nachschüssigen) Barwertfaktors bwf . Der zweite Name *Kapitalwiedergewinnungsfaktor* für denselben Vorgang ergibt sich im betriebswirtschaftlichen Bereich.

Dort wird am Schluss jedes Jahres aus den Erträgen, die z. B. nach Kauf einer Maschine damit erzielt wurden, regelmäßig ein bestimmter Betrag $\boldsymbol{A}$ für die nach $\boldsymbol{n}$ Jahren Nutzungsdauer fällige Ersatzbeschaffung zurückgelegt.

3.5.3 Beispiel: Annuität

Als Beispiel für den Annuitätsfaktor werden die oben im Beispiel unter 3.4.3.3 für den Barwertfaktor verwendeten Zahlen und die dort gezeigte Tabelle 3 genommen. In einer zweiten ausführlichen Tabelle 4 wird unten gezeigt, wie sich Zinsen und Tilgungsbeträge verändern. Man kann feststellen, dass beide Tabellen in den Hauptspalten identisch sind.

3.5.3.1 Aufgabenstellung für Annuität

Eine Firma hat für den Kauf eines Computers bei der Bank einen Kredit von 4329,48 € aufgenommen. Nach 5 Jahren ist die Nutzungsdauer des Computers abgelaufen, so dass er dann abbezahlt sein muss.

Welchen gleichbleibenden Betrag ***A*** (**Annuität**) muss die Firma jedes Jahr mit dem Computer (mindestens) erwirtschaften (in die Verkaufspreise ihrer Produkte einkalkulieren), damit am Ende jedes Jahres der Betrag ***A*** gezahlt werden kann? Nach 5 Jahren darf keine Restschuld mehr bestehen.

3.5.3.2 Aufgabenstellung für die Kapitalwiedergewinnung

Die Finanzabteilung einer Firma stellt einen Betrag von 4329,48 € aus einem Bankguthaben für einen Computerkauf zur Verfügung. Welchen gleichbleibenden Betrag **A** (Annuität) muss die Firma jedes Jahr mit dem Computer erwirtschaften, damit das Geld (und die entgangenen Zinsen) innerhalb 5 Jahren wieder in die Firmenkasse zurückfließt (und dann wieder neu angelegt werden kann).

Für beide Aufgabenstellungen kann derselbe Lösungsweg benutzt werden. Zuerst wird der Annuitätsfaktor (Kapitalwiedergewinnungsfaktor) für $i = 0{,}05$ und $n = 5$ berechnet:

$a = 0{,}05 \cdot 1{,}05^5/(1{,}05^5 - 1) = 0{,}23097$.

Dann wird die Annuität für $K_0 = 4329{,}48$ € berechnet:

$A = a \cdot K_0 = 0{,}23097 \cdot 4329{,}48 = 1000$ €.

Der jährlich zu zahlende Betrag für <u>Zins + Tilgung</u> beträgt also $A = 1000$ €.

In Tabelle 4 werden alle Zahlen schrittweise zur Probe nachgerechnet
(siehe auch Tabelle 3 für obiges Beispiel unter 3.4.3.3).

Tabelle 4: Proberechnung für Kapitalwiedergewinnung

	Zu Jahresbeginn	am Jahresende			
Jahr	Anfangsschuld oder Restschuld aus Vorjahr €	Annuität €	= 5% Zinsen €	+ Tilgung €	Restschuld €
1.	K_0 = **4329,48**	1000,00	216,47	783,53	3545,95
2.	3545,95	1000,00	177,30	822,70	2723,25
3.	2723,25	1000,00	136,16	863,84	1859,41
4.	1859,41	1000,00	92,97	907,03	952,38
5.	952,38	1000,00	47,62	952,38	0,00
Bezahlte Summen:		5000,00	664,52	**4329,48**	

4 Der Finanzlöser der HP-Taschenrechner

Der Finanzlöser (*Finance Solver*) der HP-Taschenrechner kann nur dann sinnvoll eingesetzt werden, wenn der Anwender die dabei auftretenden Begriffe der Finanzmathematik im Grundsatz kennt.

4.1 Englische Bezeichnungen

Tabelle 5: Bezeichnungen des Finanzlösers

Bezeichnungen des Finanzlösers			
Time **V**alue of **M**oney = Zeitwert für Geld	**TVM**		
Nominaler jährlicher Zinsfuß	**I%YR**	Prozentzahl	entspricht $p = 100 \cdot i$
Aktueller Barwert = Anfangsbetrag (**P**resent **V**alue)	**PV**	Geldbetrag	zu Beginn der ersten Zinsperiode, entspricht Bw
Rate (**Pa**y**m**en**t**)	**PMT**	Geldbetrag	entspricht R, für alle Zinsperioden gleich
Zukunftswert, Endwert, (**F**uture **V**alue)	**FV**	Geldbetrag	entspricht K_n
Zinsperioden, Laufzeit	**N**	Anzahl	entspricht n

4.2 Das Prinzip

Der Finanzlöser enthält TVM-Funktionen (TVM = *Time Value of Money* = Zeitwert für Geld) für Finanzierungs- und Amortisationsberechnungen. Mit diesen Funktionen kann man Zinseszinsen und Amortisationen berechnen.

4.2.1 Berechnung über Eingabemaske

Nach Aufruf des Finanzlösers durch die Tasten **[↰][FINANCE] = [↰][9]** erscheint eine Eingabemaske, in die man die Werte eingeben kann.

Der Finanzlöser ist so aufgebaut, dass alle Daten in diese Maske eingegeben werden können, nur das Feld für den zu berechnenden Wert braucht nicht ausgefüllt zu werden. Wenn im gleichzeitig angezeigten Menü der Maske für dieses Feld die Funktion **SOLVE** freigegeben ist, dann kann man damit den gewünschten Wert berechnen.

4.2.1.1 Ausfüllen der Maske

Nach Aufruf des Finanzlösers werden die Werte eingegeben.

Den Masken-Cursor auf das gewünschte Ergebnisfeld stellen und es dadurch markieren. Bei markiertem Feld erscheint in der untersten Zeile die Anweisung, was bei diesem Feld zu tun ist.

Bild 1 zeigt die ausgefüllte Maske, die mit TIME VALUE OF MONEY bezeichnet ist.

- **N** = 5 für die Laufzeit von 5 Jahren,
- **PV** = 4329,48 für den Anfangswert, in diesem Fall ist es die Anfangsschuld,
- **I%YR** = 5 für den Zinssatz von 5% pro Jahr,

- **PMT** bleibt frei, hier soll das Ergebnis stehen.
- **P/YR** = 1 für Zahlungen pro Jahr, (**P/YR** entspricht ***m*** aus Formel 9 bei unterjähriger Zinszahlung).
- **FV** = 0 für den Endwert, Restschuld soll Null sein,
- **End** = nachschüssige Zahlung (man kann für dieses Feld auch **Beg** für vorschüssige Zahlung auswählen).

4.2.1.2 Berechnung der Werte

Dann wird der Masken-Cursor auf das Feld **PMT** gestellt und **SOLVE** gedrückt. Das Ergebnis ist in Bild 2 zu sehen. Für die Annuität ***A*** (**PMT**) ergibt sich der Wert **-1000**.

Das Ergebnis berechnet der Taschenrechner aus den übrigen Daten und schreibt es ins markierte Feld. Der vorherige Wert des Ergebnisfeldes wird durch das berechnete Ergebnis überschrieben.

Wenn der Zinssatz **I%YR** aus den übrigen Daten berechnet werden soll, bringt der Finanzlöser nach Ausführung von SOLVE manchmal die Fehlermeldung ***No Solution!***. Die Ursache liegt in den Formeln 11 und 12, die sich nicht nach dem Zinssatz ***i*** auflösen lassen (siehe oben). Doch in den meisten Fällen findet er auch hier die richtige Lösung, wenn man die Vorzeichen richtig wählt (siehe unten).

4.3 Berechnungen

Hier soll obiges Beispiel (Abzahlung eines Kredits, siehe 3.5.3) mit dem Finanzlöser nochmals komplett durchgerechnet werden.

Bild 1: Maske TVM, PMT markiert

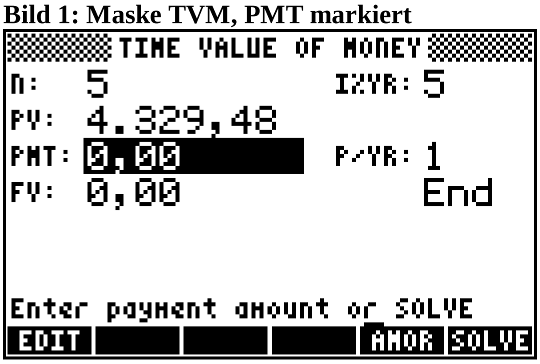
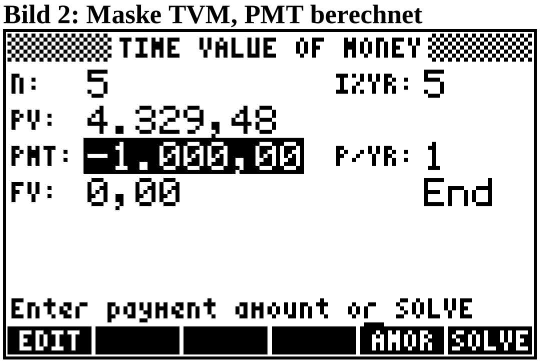


Bild 2: Maske TVM, PMT berechnet



4.3.1 Schrittweise Amortisation

Die Daten aus Bild 2 bleiben als Ausgangwerte für eine Amortisationsberechnung stehen.

Die Menüfunktion **SOLVE** wurde soeben benutzt. Ohne die Werte der Maske zu verändern, wird mit **[F5]** in das Verzeichnis **AMOR** (Amortisation) gewechselt. Es erscheint eine neue Maske, die mit AMORTIZE überschrieben ist (Bild 3). Der Wert bei **"Payments:"** gibt an, wieviele Amortisationsschritte (Zahlungen) man auf einmal durchführen möchte. Die vorgegebene **1** bleibt dort stehen.

Bild 3: Maske AMORTIZE (leer)

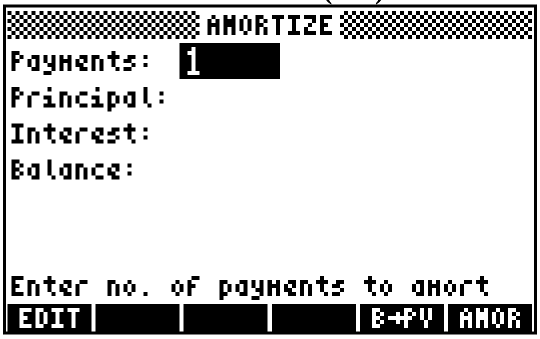
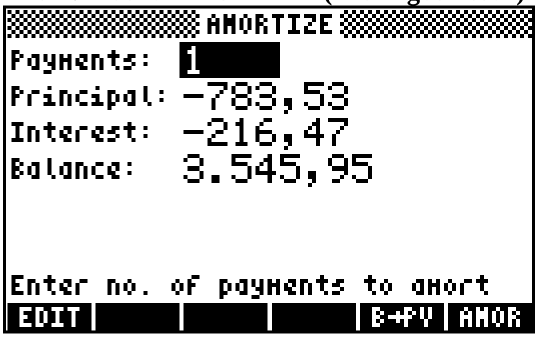


Bild 4: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen)



Mit **[F6]** wird die Menüfunktion **AMOR** gestartet. Die Maske füllt sich mit Daten, wie man auf Bild 4 sehen kann.

Bei Betrachtung der Tabelle 4 fällt auf, dass die jetzt in AMORTIZE befindlichen Daten den Daten des 1. Jahres dieser Tabelle entsprechen:

Payment = 1 = Zustand nach 1 Zahlung .

Principal = -783,53 = Tilgung im 1. Jahr,

Interest = -216,47 = Zinszahlung im 1. Jahr,

Balance = 3545,95 = Restschuld am Ende des 1. Jahres.

Wieder folgt 1 Schritt mit Payment = 1.

Mit Druck auf die Menütaste **B→PV** (Balance to Present Value = Restschuld als Anfangswert) wird die Restschuld als Anfangswert einer neuen Berechnung in vorherige TIME VALUE OF MONEY-Maske übernommen, die aber nicht sichtbar ist.

Erneutes Drücken der Menütaste **AMOR** in der momentan sichtbaren AMORTIZE-Maske zeigt die Daten für das 2. Jahr der Tabelle (siehe Bild 5). Die Wiederholung von **B→PV** und **AMOR** zeigt die Daten für das 3. Jahr (Bild 6):

Bild 5: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen)

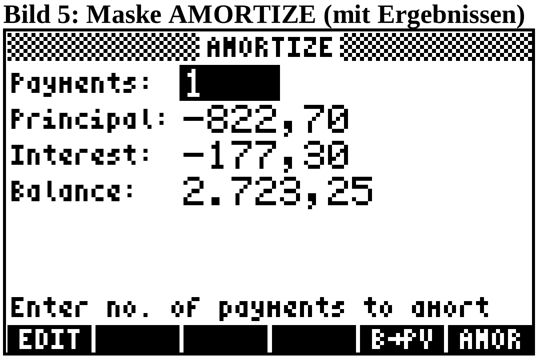
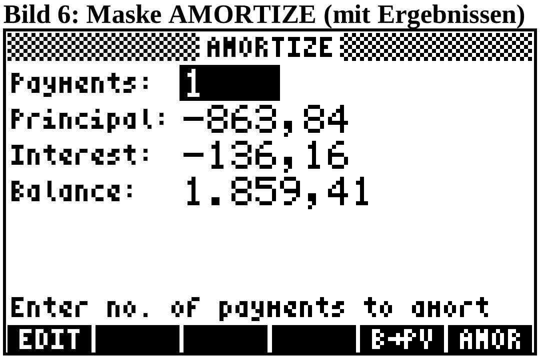


Bild 6: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen)



Weitere 2 Schritte mit je **B→PV** und **AMOR** führen zu Bild 7 und Bild 8, welche die Daten für das 4. und 5. Jahr zeigen.

Der angezeigte Wert $5{,}4 \cdot 10^{-9}$ für die Restschuld (Balance) am Ende der Laufzeit resultiert aus den Auf- und Abrundungen für die Beträge und kann zu Null gesetzt werden.

Bild 7: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen)

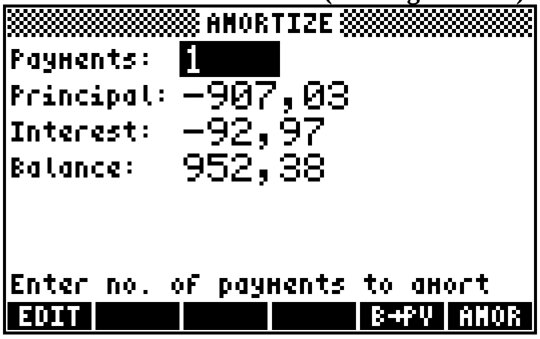
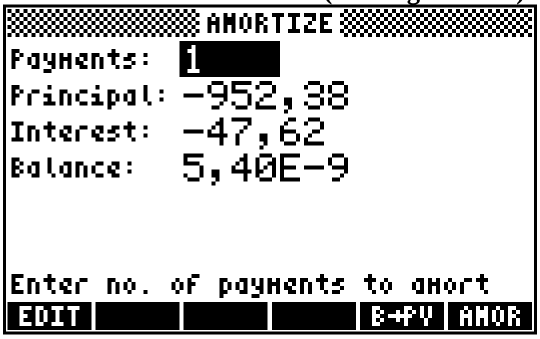


Bild 8: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen)



Der Wert 5,40E-9 im Feld Balance in Bild 8 ist die Restschuld, sie ist praktisch null. Der Finanzlöser rechnet hier genau, anstatt abzurunden, was jeder normale Mensch machen würde.

Wenn man nun den Finanzlöser durch zweimaliges **[ON]** verlässt, sieht man im Stack[5] alle berechneten Werte mit einer Bezeichnung vor einem Doppelpunkt. Außerdem sind im aktuellen Verzeichnis die Variablen **N, I%YR, PV, PMT, PYR** und **FV** angelegt worden, in denen die Werte der letzten Berechnung gespeichert sind.

4.3.2 Amortisationsstand zu einem bestimmten Jahresende

Die Daten von Bild 2 sollen nun als Ausgangswerte dienen. Wie sieht der Stand der Amortisation am Ende des 2. Jahres aus?

Mit **AMOR** wird die Maske AMORTIZE aufgerufen und dort **Payments =2** gesetzt. Nach **AMOR** und sieht man das Ergebnis (Bild 9). Die Menüfunktion **B→PV** wird jetzt nicht verwendet.

Bild 9: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen)

Payments = 2 zeigt den Zustand nach dem 2. Jahr.
Principal = -1606,23 ist die Summe der bisher bezahlten Tilgungsbeträge (783,53 + 822,70)
Interest = -393,77 ist die Summe der bisher bezahlten Zinsen (216,47 + 177,30)
Balance = 2723,25 ist die Restschuld nach dem 2. Jahr.

Ein Vergleich mit Tabelle 4 bestätigt die Richtigkeit der Werte.

4.3.3 Berechnung über TVM-Menü

Wer die Eingabemaske TVM nicht nutzen möchte, kann das **Menü TVM** (Menünummer 80.01) benutzen. Das **Menü TVM** funktioniert ähnlich wie die AMORTIZE-Maske.

Es wird über den Befehl **TVM** oder über **80 MENU** direkt aufgerufen und kann durch Drücken der Taschenrechnertaste [VAR] verlassen werden. Eingabemaske und Menüs greifen auf dieselben Variablen zu, die sich im aktuellen Verzeichnis befinden.

Nach Aufruf erscheint das TVM-Menü (Bild 10). Die Variablennamen sind in hellen umrandeten Menüfeldern zu sehen. Die Werte können in den Stack gestellt und dann durch Drücken auf die Menütaste in die gewünschte Variable gespeichert werden.

---

[5] Stack ist die auf dem Bildschirm angezeigte Liste der Werte

Beispiel:

Die Werte aus Bild 2 werden in die schon bekannten Variablen in den hell hinterlegten Menüfeldern eingespeichert. Für das Ende des 2. Jahres wird die Zahl 2 (entsprechend **Payments = 2**) in den Stack gestellt. Nun wird die Menüfunktion **AMRT** gestartet. Man erhält (wie in der Maske AMORTIZE) den Amortisationsstand nach dem 2. Jahr (Bild 11). Die Ergebnisse sind zu denen in Bild 9 identisch.

Bild 10: Finanzlöser Eingabemaske

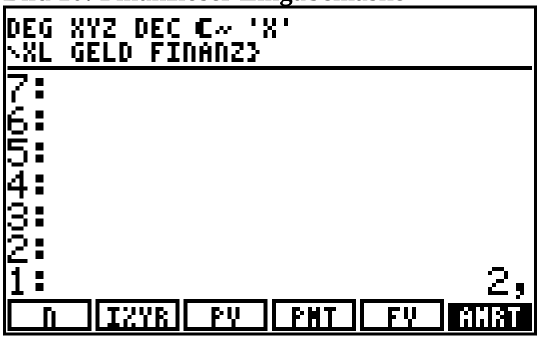
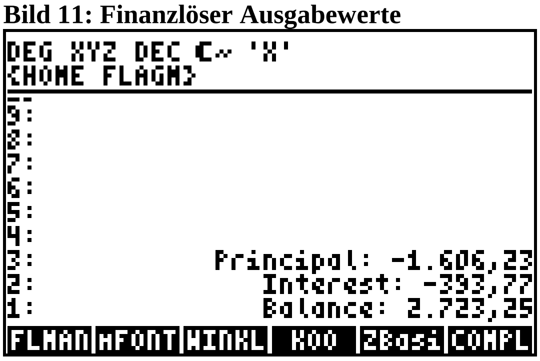


Bild 11: Finanzlöser Ausgabewerte



Bei Bild 11 wurde aufgrund der Zeilenlänge ein kleinerer Schriftfont benutzt.

4.3.4 Die TVM-Befehle

Im Befehlskatalog gibt es 5 TVM-Befehle:

Tabelle 6: TVM-Befehle des Finanzlösers

Befehl	Bedeutung
TVM	Aufruf des TVM-Menüs (oder 80 MENU)
TVMBEG	Einstellung der Berechnungsweise für vorschüssige Zahlungen, (Flag -14 = 1)
TVMEND	Einstellung der Berechnungsweise für nachschüssige Zahlungen, (Flag -14 = 0)
TVMROOT	berechnet den Wert einer TVM-Variablen aus den Werten der übrigen Variablen. Der Variablenname, z.B. 'PMT', ist in den Stack zu stellen. Nach Aufruf des Befehls steht das Ergebnis im Stack, ist aber nicht in der Variablen selbst gespeichert.
AMORT	berechnet aus den Werten der TVM-Variablen eine Amortisation. Der Wert "Payments", z.B. 2 für den Stand nach dem 2. Jahr, muss im Stack stehen. Dieser Befehl funktioniert genauso wie die Menüfunktion **AMRT** in der TVM-Maske.

5 Taschenrechnerprogramme

Bei den obigen Beispielen wurden HP-Taschenrechner mit ihren mathematischen Funktionen manuell eingesetzt, indem die Zahlen eingegeben und über die Potenzfunktion die Werte berechnet wurden.

Der Finanzlöser deckt nur bestimmte Berechnungen ab, genügt aber nicht allen Erfordernissen, weil er z. B. den Barwertfaktor nicht angibt. Diesen muss man dann über den Barwert per Tastatureingaben selbst berechnen.

Deshalb bietet der Verfasser auf seiner Internetseite www.praxelius.de unter der Bezeichnung FINANZ.txt einige Taschenrechnerprogramme an, mit denen man Barwertfaktoren, Annuitäten und Endwerte von Ratenzahlungen im Einzelnen berechnen kann, ohne an eine Masken- oder Menüumgebung gebunden zu sein.

Auch die Berechnung des Zinssatzes aus der Auszahlungssumme einer Lebensversicherung kann per Programm vorgenommen werden.

Für finanzmathematische Berechnungen stellt der Verfasser folgende Programme für den HP-Taschenrechner als HP-Verzeichnis FINANZ zur Verfügung:

Tabelle 7: HP-Taschenrechnerprogramme

Programm	Berechnungsergebnis
KNVR	Berechnung von **kn** = K_n/R bei **vorschüssigen Ratenzahlungen** nach Formel 16. Die Werte für Zinssatz ***i*** und Laufzeit ***n*** müssen im Stack stehen.
KNNR	Berechnung von **kn** = K_n/R bei **nachschüssigen Ratenzahlungen** nach Formel 17. Die Werte für Zinssatz ***i*** und Laufzeit ***n*** müssen im Stack stehen.
ZINSS	Berechnung des Zinssatzes ***i*** aus der Formel 16 (für **vorschüssige Zahlungen**). Im Stack müssen die Werte für **kn** = K_n/R und Laufzeit ***n*** stehen.
BWFAK	Berechnung des Barwertfaktors ***bwf*** für **nachschüssige Ratenzahlungen**. Im Stack müssen Zinssatz ***i*** und Laufzeit ***n*** stehen.
BWDEF	Funktionsgleichung **BWF** für den Barwertfaktor zur Aktivierung und Umsetzung durch die DEFINE-Funktion.
Info	Information über das Ausgabedatum, Name des Autors und Internetadresse
Hinweis: In den Programmen wurde **j** als Variablenname anstelle von **i** für den Zinssatz verwendet, weil **i** bereits durch die Konstante für die imaginäre Einheit (Wurzel aus -1) belegt ist.	

Die Programme laufen im **RPN-Modus**, sind selbsterklärend und können ohne Anleitung verwendet werden. Allerdings sollte man auch hier das nötige finanzmathematische Grundlagenwissen haben und den Taschenrechner kennen (siehe Lit. [2]). Die Anwendung der Programme ZINSS, KNVR und BWFAK wird anschließend in einem Beispiel gezeigt.

5.1 Beispiel: Zinssatz einer Lebensversicherung

Berechnung des Zinssatzes einer Lebensversicherung aus der Auszahlungssumme und der Anzahl und Höhe der Raten.

Der 30-jährige Versicherungsnehmer (siehe Beispiel unter 3.2.1.1) zahlt 35 Jahre lang am Anfang jedes Jahres 600 € in seine Lebensversicherung ein. Er schätzt den Zinssatz auf 6%. Er hatte sich mit Formel 11 eine Auszahlungssumme von **70872,52** € ausgerechnet.

In den jährlichen Mitteilungen seiner Versicherungsgesellschaft wird ihm jedoch eine Auszahlungssumme von **75000** € angekündigt. Wie hoch ist der Zinssatz?

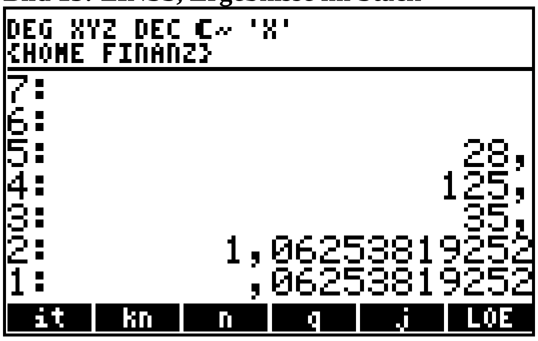
Zur Berechnung mit dem HP-Taschenrechner wird das Programm ZINSS verwendet.

Zuerst muss der Endfaktor **kn =** K_n/R berechnet werden, der angibt, auf welches Vielfache einer Rate das Endkapital angewachsen ist: **kn** = 75000 / 600 = **125**. Dies bedeutet, dass der Versicherungsnehmer nach Einzahlung von ***n*** = 35 Raten am Ende der Laufzeit den Wert von 125 Raten zurückbekommt. Das Verhältnis der ausgezahlten zur eingezahlten Summe beträgt 125/35 = 3,57.

Die Zahlen **125** und **35** werden in den Stack gestellt und das Programm ZINSS gestartet. Da eine direkte Berechnung (wegen der nicht elementar lösbaren Gleichungen) nicht möglich ist, berechnet das Programm das Ergebnis durch Iteration, also durch „Probieren", bis die Abweichung kleiner als 0,00000000001 ist. Das benötigt etwas Zeit. Dann gibt der Rechner das Ergebnis aus (siehe Bild 12). Der Zinssatz ist auf 4 Kommastellen gerundet, der genaue Wert steht in der Variablen ***j*** im aktuellen Verzeichnis zur Verfügung (Bild 13).

Bild 12: ZINSS, Ergebnisausgabe

Bild 13: ZINSS, Ergebnisse im Stack



Die Inhalte der Variablen **it** = 28 (Iterationen), **kn** = 125 (Endfaktor), **n** = 35 (Anzahl der Raten), **q** = 1,06253819252 und **j** = 0,06253819252 (entspricht Zinssatz ***i***) wurden in den Stack geholt, damit sie im Bild 13 gezeigt werden können. Mit **LOE** können die Variablen gelöscht werden.

Zur Nachprüfung dient das Programm KNVR (vorschüssige Raten).

(*i* =) 0,06253819252 und (***n*** =) 35 wird in den Stack gestellt.

Ergebnis: **kn** = 125 (wie erwartet, siehe Bild 14).

Bild 14: KNVR, Ausgabewert

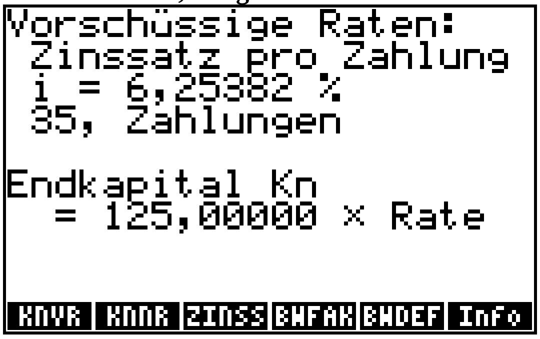
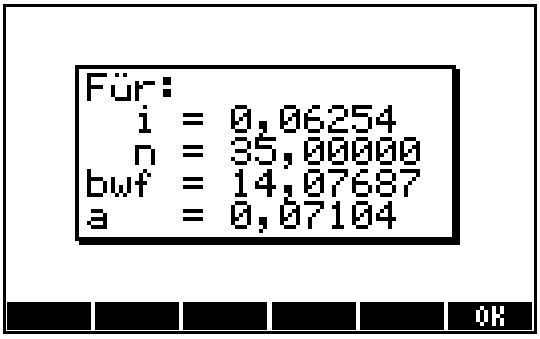


Bild 15: Barwertfaktor BWFAK



Nun noch der Barwert der Einzahlungen:

In den Stack wird eingegeben: (**j** =) 0,06253819252 und (**n** =) 35.

Nach Aufruf des Programms **BWFAK** erhält man den Barwertfaktor ***bwf*** = 14,07687 (Bild 15). Dieser muss für unser Beispiel noch mit ***q* = (1 + *i*)** = 1,06253819252 multipliziert werden, weil es sich bei den Raten der Lebensversicherung um vorschüssige Zahlungen handelte:

bwf' = 14,07687 · 1,06253819252 = 14,95722.

Daraus ergibt sich der Barwert ***Bw*** = 14,95722 · 600 = **8974,33** €.

Wäre diese Summe zu Vertragsbeginn als Gesamtbetrag einbezahlt worden, so hätte sie sich in 35 Jahren mit dem Zinssatz von 6,25% auf 75000 € erhöht.

Probe mit Aufzinsungsfaktor (Formel 4): 8974,33 · $1{,}06253819252^{35}$ = 75000,00 €.

5.2 Zinssatz mit dem Finanzlöser

Nun soll der Zinssatz für das unter 5.1 gezeigte Beispiel auch mit dem Finanzlöser ermittelt werden. Die Maske "TIME VALUE OF MONEY" wird, wie im Bild 16 gezeigt (bitte auf die Vorzeichen achten!), ausgefüllt und für **I%YR** wird der Wert 0 eingegeben. Dann wird die Berechnung für das markierte Feld **I%YR** mit SOLVE gestartet. Als Lösung steht dort dann der Wert **I%YR: 6,253....** Nach Verlassen der Maske mit CANCEL zeigt der Bildschirm im Stack das genaue Ergebnis (siehe Bild 17): **6,25381925217**.

Bild 16: Maske TVM Ermittlung des Zinssatzes

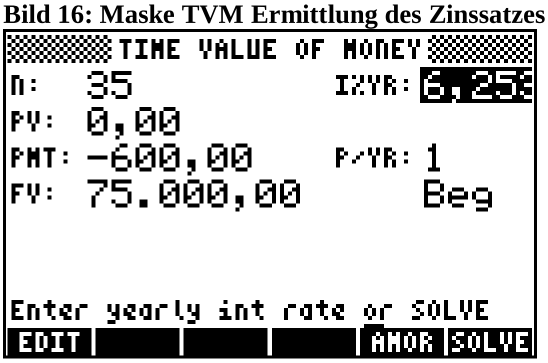
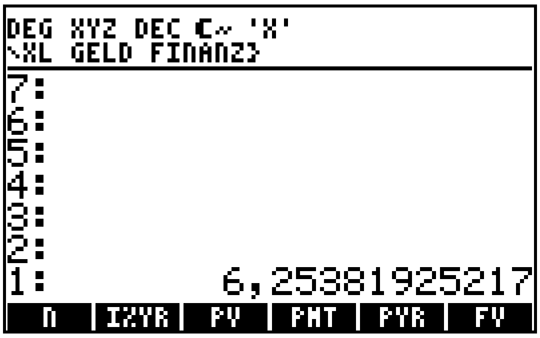


Bild 17: Zinssatz im Stack



Der Finanzlöser kommt also zu derselben Lösung wie das Programm ZINSS.

5.3 Vorzeichen beim Finanzlöser

Zu beachten sind bei der Zinssatzberechnung die Vorzeichen in den Feldern **PMT** und **FV**. Wenn man für beide Felder das gleiche Vorzeichen angibt, meldet der Finanzlöser ***Error: No Solution.***

Die Berechnung des Zinssatzes funktioniert **nur mit gegensätzlichen Vorzeichen**: **PMT** = **-**600 und **FV** = 75000 oder auch mit **PMT** = 600 und **FV** = **-**75000.

Die Vorzeichenfestlegung des Finanzlösers ist auf die **Cash-Flow-Diagramme** zurückzuführen, die die Barwerte meist negativ (als Darlehen) und die Zahlungen als zurückfließende Beträge (aus der Sicht des Darlehensgebers) positiv bewerten. Aus der Sicht des Schuldners kehren sich die Vorzeichen um. Beide Sichten kann man mit dem Finanzlöser darstellen.

6 Zusammenfassung

Wir haben die Finanzfunktionen der HP-Taschenrechner verwendet. Beim Anwender wird die Kenntnis der Grundlagen finanzmathematischer Berechnungen vorausgesetzt. In der Praxis werden solche Berechnungen trotz der guten Finanzfunktionen der Computer und Taschenrechner oft fehlerhaft durchgeführt, weil die Anwender nicht damit umgehen können oder entsprechende Beschreibungen fehlen.

Deshalb wurden in diesem Beitrag die finanzmathematischen Grundlagen sehr ausführlich behandelt. Es wurden jedoch nur die wichtigsten Grundbegriffe der Finanzmathematik gezeigt und viele spezielle Besonderheiten ausgespart. Der Leser möge bei Bedarf die finanzmathematischen Fachbücher zu Rate ziehen.

7 Anhang

7.1 Literatur

[1] *Prof. Dr. Marcel Nicolas,* **Finanzmathematik**, Zweite Auflage,
Sammlung Göschen, Band 1183/1183a, Verlag Walther de Gruyter & Co, Berlin, 1967.
Das Buch verwendet noch die oben beschriebenen Tabellen, weil im Jahr 1967 Taschenrechner mit den nötigen Potenzfunktionen noch nicht verfügbar waren.

[2] *Otto Praxl*, **Wissenschaftliche HP-Taschenrechner im praktischen Einsatz**,
GRIN-Verlag, ISBN 978-3-656-18641-0, 2. Ausgabe, 2013.
Das Buch enthält eine ausführliche Einführung in die professionelle Anwendung dieser wissenschaftlichen Taschenrechner.

7.2 Formelverzeichnis

Formel 1: Zinsformel für einfachen Zins 8
Formel 2: Endwert bei einfachem Zins 8
Formel 3: Tageweise Zinsen 8
Formel 4: Endkapital bei Zinseszinsen 10
Formel 5: Abzinsungsformel 10
Formel 6: Abzinsungsfaktor 11
Formel 7: Berechnung der Laufzeit 11
Formel 8: Berechnung des Zinssatzes 11
Formel 9: Unterjährige Zinszahlung 12
Formel 10: Aufzinsungsfaktor q_m für n=1 und m Zinsperioden pro Jahr 12
Formel 11: Effektiver Jahreszinssatz 12
Formel 12: Kontinuierliche Verzinsung 12
Formel 13: Grenzwert e 13
Formel 14: Binomische Reihe für den Wert e 13
Formel 15: Augenblicksverzinsung 13
Formel 16: Kapitalendwert bei vorschüssiger Ratenzahlung 15
Formel 17: Endwert (nachschüssig) 15
Formel 18: Barwertfaktor (nachschüssig) 16
Formel 19: Barwertfaktor (vorschüssig) 17
Formel 20: Barwert (nachschüssig) 17
Formel 21: Barwert (vorschüssig) 17
Formel 22: Auszahlung in Raten 17
Formel 23: Zinsbetrag (nachschüssig) 17
Formel 24: Zinsbetrag (vorschüssig) 17
Formel 25: Annuität A und Annuitätsfaktor a 19

7.3 Bilderverzeichnis

Bild 1: Maske TVM, PMT markiert 22
Bild 2: Maske TVM, PMT berechnet 22
Bild 3: Maske AMORTIZE (leer) 23
Bild 4: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen) 23
Bild 5: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen) 23

Bild 6: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen) 23
Bild 7: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen) 24
Bild 8: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen) 24
Bild 9: Maske AMORTIZE (mit Ergebnissen) 24
Bild 10: Finanzlöser Eingabemaske 25
Bild 11: Finanzlöser Ausgabewerte 25
Bild 12: ZINSS, Ergebnisausgabe 27
Bild 13: ZINSS, Ergebnisse im Stack 27
Bild 14: KNVR, Ausgabewert 28
Bild 15: Barwertfaktor BWFAK 28
Bild 16: Maske TVM Ermittlung des Zinssatzes 28
Bild 17: Zinssatz im Stack 28

7.4 Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Abkürzungen und Formelzeichen 6
Tabelle 2: Englische Begriffe der Finanzmathematik 6
Tabelle 3: Proberechnung einer nachschüssigen Zahlung 18
Tabelle 4: Proberechnung für Kapitalwiedergewinnung 20
Tabelle 5: Bezeichnungen des Finanzlösers 21
Tabelle 6: TVM-Befehle des Finanzlösers 25
Tabelle 7: HP-Taschenrechnerprogramme 26

7.5 Sachregister (Index)

A

Abzinsen 10
Abzinsungsfaktor 11
Anfangskapital 8
Anfangswert 21
Annuität 19
Annuitätsfaktor 19
Aufzinsungsfaktor 10
Augenblicksverzinsung 12
Auszahlungssumme 15

B

Barwert 16
Barwertfaktor 16

E

e (Basis des nat. Logarithmus) 13
Eingabemaske 21
Einlage, kurzfristig 8

F

Fehlermeldung: No Solution! 22
Finanzlöser 21

J

Jahreszinssatz, effektiver 12

K

Kapitalwiedergewinnungsfaktor 19

L

Laufzeit 21
Lebensversicherung 15

N

nachschüssig 14

R

Ratenzahlungen 14
Ratenzahlungen, regelmäßige 16
Rente (Definition) 14

T

Tilgungsrate 19
TIME VALUE OF MONEY 21
TVM-Funktionen 21

V

Verzinsung, einfache 8
Verzinsung, kontinuierliche 12
Verzinsung, lineare 8
Verzinsung, unterjährig 8
vorschüssig 14
Vorzeichen 22

W

Wachstumskonstante e 13
Wirtschaftlichkeitsberechnungen 17

Z

Zins (Definition) 7
Zinsbetrag 7
Zinsen, tageweise 8
Zinseszinsen 9
Zinsfuß 7
Zinsperiode 7
Zinssatz 7
Zinstage 8