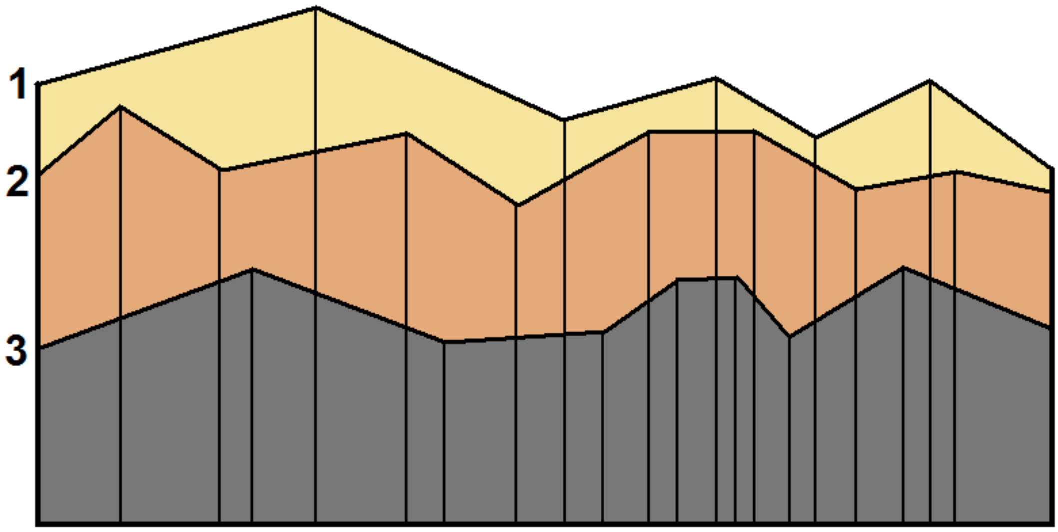
Otto Praxl

Digitale geometrische Modelle (DGM)

Der Beitrag behandelt die Theorie und Praxis der Berechnung von Längen, Flächen, Winkeln und Rauminhalten im dreidimensionalen Raum mittels Vektoren.

Dreiecke finden in räumlichen Dreiecksnetzen beim digitalen Gelände-Modell (DGM) eine praktische Anwendung.

Die Berechnungen werden mit einem programmierbaren, wissenschaftlichen Taschenrechner von HP durchgeführt. Ein ausführliches Beispiel und HP-Programme für ein digitales Geländemodell (DGM) sind beigefügt.



Impressum

Verfasser:

Otto Praxl.

Internetseite:

www.praxelius.de

Veröffentlichung

Das Dokument wird als verschlüsseltes PDF-Dokument auf der Homepage *www.praxelius.de* veröffentlicht. Es darf nicht außerhalb dieser Homepage veröffentlicht werden.

Layout und Gestaltung (mit Microsoft WORD™ 2007)**:**

Otto Praxl

Für das Lesen mit einem PDF-Reader wurden alle Übersichten, Verzeichnisse und die Querverweise im Text mit Hyperlinks unterlegt, die nach Mausklick zur gewünschten Stelle im Text verzweigen und nach Klick auf die Schaltfläche „Zurück zur vorigen Seitenansicht“ wieder zur ursprünglichen Stelle im Text zurückführen.

Rechtschreibung:

Die deutsche Rechtschreibung erfolgt nach den amtlichen Regeln von 2006.
Wenn die Eindeutigkeit einer Aussage es erfordert, wird von diesen Regeln bewusst abgewichen.

Haftungsausschluss:

Im Text und in den Grafiken können auch Fehler enthalten sein. Für evtl. Fehler und daraus resultierende Nachteile übernimmt der Verfasser keine Haftung.

Bildnachweise:

Alle Zeichnungen und Bilder stammen vom Verfasser.

Letztes Bearbeitungsdatum: 11.05.2015

Bearbeitungskennzeichen: DGM-83294-013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Zur Lösung von geometrischen Problemen gibt es analytische und graphische Methoden. In der analytischen Geometrie werden Punkte, Linien, Flächen und räumliche Gebilde durch Zahlen und Formeln festgelegt, bei den graphischen Methoden löst man die Aufgaben mit Bleistift, Lineal und Zirkel auf dem Zeichenbrett (darstellende Geometrie). Computer und leistungsfähige Taschenrechner beherrschen die analytischen und die graphischen Methoden gleichermaßen.

In diesem Beitrag wird gezeigt, wie man Probleme der räumlichen Geometrie auf dem wissenschaftlichen HP-Taschenrechner mit Vektoren lösen kann. Hierbei wird vor allem das Dreieck im dreidimensionalen Raum betrachtet, das die Grundlage vieler Ingenieursysteme bildet, insbesondere in der Bauinformatik und in der Geodäsie.

Das Prinzip der digitalen geometrischen Modelle (DGM) wird erläutert und ein HP-Programm für ein digitales Geländemodell entwickelt. Ein sehr ausführliches Berechnungsbeispiel zeigt die Anwendung der Theorie in der Praxis.

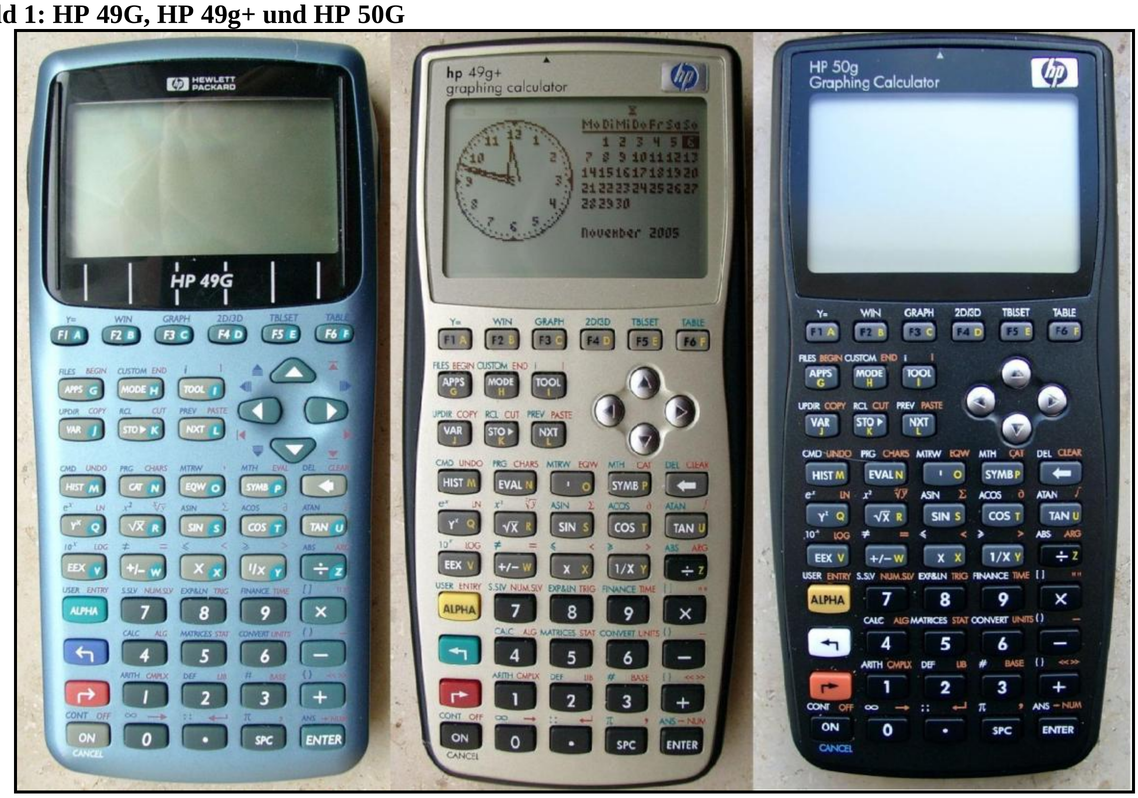
Die mathematischen Grundlagen der vektoriellen analytischen Geometrie (Vektorrechnung) werden beim Leser als bekannt vorausgesetzt. Im Zweifelsfall lese man in den Lehrbüchern nach.

1.1 Technische Hilfsmittel zur Berechnung

1.1.1 Taschenrechner

Zur Berechnung verwenden wir einen programmierbaren, wissenschaftlichen Grafikrechner von HP. Es stehen drei Modelle zur Verfügung, die in Bild 1 gezeigt sind.

Bild 1: HP 49G, HP 49g+ und HP 50G



Die Rechenleistung und Vielfalt der Funktionen dieser drei Modelle ist identisch. Der HP 49G hat eine Bildschirmgröße von 131 × 64 Pixel. Die beiden anderen haben ein Bildschirmgröße von 131 × 80 Pixel und verfügen über einen Schacht für eine SD-Speicherkarte. Alle drei Rechner haben eine Schnittstelle zum PC, der HP 49G verfügt über serielle RS232-Schnittstelle, die beiden anderen haben eine USB-Schnittstelle. Die entsprechende Konnektions-Software (Conn4x) gibt es im Internet unter www.hpcalc.org .

Die Beispiele im nachfolgenden Text werden mit einem HP 50G berechnet.

1.1.2 Computersysteme (PC)

Nachdem heute fast jeder, der sich mit der hier befassten Materie beschäftigt, einen PC zuhause hat, können auch die nachfolgend behandelten Verfahren darauf programmiert werden. Die theoretischen Grundlagen werden hier erläutert.

1.2 Variablen und Formelzeichen

Tabelle 1: Variablen und Formelzeichen

Bezeichnung	Notation (Beispiele)	Bemerkungen
Eckpunkte von Dreiecken	A, B, C, A', B', C'	Großbuchstaben
Schwerpunkte von Dreiecken	S, S'	Großbuchstaben
Ortsvektoren zu den Eckpunkten von Dreiecken	$\underline{\boldsymbol{A}}$, $\underline{\boldsymbol{B}}$, $\underline{\boldsymbol{C}}$, $\underline{\boldsymbol{A'}}$, $\underline{\boldsymbol{B'}}$, $\underline{\boldsymbol{C'}}$	Großbuchstaben, kursiv + fett + unterstrichen
Seitenvektoren von Dreiecken nennen wir die Vektoren, die durch Seitenlänge und Seitenrichtung bestimmt werden.	$\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$, $\underline{\boldsymbol{c}}$, $\underline{\boldsymbol{a'}}$, $\underline{\boldsymbol{b'}}$, $\underline{\boldsymbol{c'}}$	Kleinbuchstaben, kursiv + fett + unterstrichen
Normalenvektor (ein auf einer Ebene senkrecht stehender Vektor)	$\underline{\boldsymbol{N}}$	Großbuchstaben, kursiv + fett + unterstrichen
Einheitsvektoren (Normalen-Einheitsvektor) mit der Länge 1	$\underline{\boldsymbol{n}}$	Kleinbuchstaben, kursiv + fett + unterstrichen
Vektorkomponenten in Zeilendarstellung (in eckigen Klammern)	$[\boldsymbol{x_A\ y_A\ z_A}]$	Kursiver Fettdruck
Sonstige Variablen	$\boldsymbol{a, b, c, A}$	Kursiver Fettdruck
Winkel	$\boldsymbol{\alpha, \beta, \gamma, \mu}$	Griechische Buchstaben in kursivem Fettdruck

1.3 Vektornotation

1.3.1 Vektorbezeichnungen

Nachdem die für die Bezeichnung der Vektoren üblichen Frakturbuchstaben (z. B. 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔑, 𝔅, 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔫, 𝔳) zwar hier im Textsystem, aber nicht im Formeleditor zur Verfügung stehen, werden hier in diesem Beitrag Vektoren durch kursiven Fettdruck mit Unterstreichung (z. B. $\underline{\boldsymbol{A}}$, $\underline{\boldsymbol{B}}$, $\underline{\boldsymbol{C}}$, $\underline{\boldsymbol{N}}$, $\underline{\boldsymbol{V}}$, $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$, $\underline{\boldsymbol{c}}$, $\underline{\boldsymbol{n}}$, $\underline{\boldsymbol{v}}$) gekennzeichnet, damit im Text und in den Formeln einheitliche Zeichen erscheinen.

1.3.2 Komponentendarstellung der Vektoren

Für die Komponentendarstellung der Vektoren verwenden wir

anstelle der platzverschwendenden Spaltenschreibweise $\underline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_A} \\ \boldsymbol{y_A} \\ \boldsymbol{z_A} \end{pmatrix}$

die platzsparende und übersichtlichere Zeilenschreibweise $\underline{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{x_A\ y_A\ z_A}]$, die wir auch beim HP-Taschenrechner eingestellt haben. Zwischen den Komponenten steht als Trennzeichen normalerweise ein Leerzeichen, es kann aber auch ein Semikolon (;) dort stehen, wenn es der Deutlichkeit dient. Das Komma als Trennzeichen sollte vermieden werden, da es mit dem Dezimalkomma der Zahlen verwechselt werden könnte.

Mathematisch sind beide Schreibweisen gleichwertig.

Beim hier verwendeten HP-Taschenrechner wird ein Vektor durch Zeilenschreibweise seiner Komponenten ***x, y*** und ***z*** in eckigen Klammern **[**`1,25 2,43 3,94`**]** dargestellt, wobei die Komponenten reelle Zahlen sein müssen, die durch ein Leerzeichen getrennt sind. Wenn die Vektorkomponenten ganze Zahlen sind, werden die Nachkommastellen weggelassen, sodass nur die Dezimalzeichen und die Leerzeichen sichtbar sind: **[**`1, 2, 3,`**].**

Wenn die Nachkommastellen auf eine fixe Anzahl (z. B. 4) eingestellt sind, zeigt der Rechner fehlende Nachkommastellen als Nullen an **[**`1,0000 2,0000 3,0000`**].**

2 Vektoren im Raum

2.1 Koordinatensystem

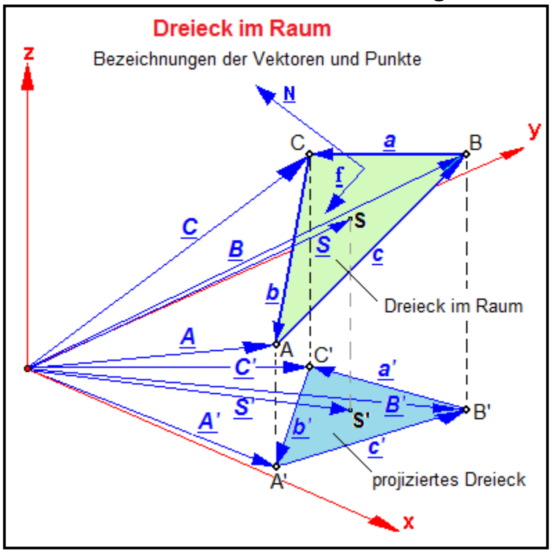
Die Berechnungen erfolgen in einem kartesischen Koordinatensystem (orthogonales Rechtssystem) mit den Achsen ***x***, ***y*** und ***z***, wobei die ***z***-Achse nach oben weisen soll.

Beim HP-Taschenrechner muss dafür der Koordinaten-Modus mit dem Befehl **RECT** (= rectangular = rechtwinklig) eingestellt werden.

Bild 2 zeigt das Dreieck im Raum und seine Projektion auf die ***x,y***-Ebene.

2.2 Ortsvektoren

Bild 2: Dreieck im Raum, Bezeichnungen der Vektoren und Punkte



Ortsvektoren gehen vom Koordinatenursprung aus. Die drei Ortsvektoren vom Koordinatenursprung zu den Eckpunkten A, B und C des im Raum liegenden Dreiecks ABC (siehe Bild 2) werden mit $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ bezeichnet. Die Koordinatenwerte der Eckpunkte des Dreiecks sind zugleich die Komponenten dieser Ortsvektoren.

Formel 1: Vektorkomponenten des Dreiecks im Raum

$$\underline{A} = [x_A \; y_A \; z_A]$$
$$\underline{B} = [x_B \; y_B \; z_B]$$
$$\underline{C} = [x_C \; y_C \; z_C]$$

Das auf die ***x,y***-Ebene projizierte Dreieck hat dort die Eckpunke A', B' und C'. Auch sie sind durch drei Ortsvektoren vom Koordinatenursprung zu diesen Eckpunkten bestimmt. Sie werden mit $\underline{A'}$, $\underline{B'}$ und $\underline{C'}$ bezeichnet.

Formel 2: Vektorkomponenten des projizierten Dreiecks

$$\underline{A'} = [x_A \; y_A \; 0]$$
$$\underline{B'} = [x_B \; y_B \; 0]$$
$$\underline{C'} = [x_C \; y_C \; 0]$$

$\underline{A'}$, $\underline{B'}$ und $\underline{C'}$ sind die Projektionen der Vektoren $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ auf die ***x,y***-Ebene und haben deshalb die ***z***-Komponente mit dem Wert **0.**

2.3 Seitenvektoren des Dreiecks

Die Seitenvektoren des Dreiecks **ABC** sind die Differenzvektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ aus den Ortsvektoren $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$, wobei, wie bei Dreiecken üblich, die Seite dem gleichnamigen Eckpunkt gegenüberliegt:

Formel 3: Vektorkomponenten der Seitenvektoren

$$\boxed{\begin{array}{lll} \underline{B}+\underline{a}=\underline{C} & \Rightarrow & \underline{a}=\underline{C}-\underline{B}=\left[x_a\ y_a\ z_a\right] \\ \underline{C}+\underline{b}=\underline{A} & \Rightarrow & \underline{b}=\underline{A}-\underline{C}=\left[x_b\ y_b\ z_b\right] \\ \underline{A}+\underline{c}=\underline{B} & \Rightarrow & \underline{c}=\underline{B}-\underline{A}=\left[x_c\ y_c\ z_c\right] \end{array}}$$

Im projizierten Dreieck gilt analog:

Die Seitenvektoren des projizierten Dreiecks **A' B' C'** sind die Differenzvektoren $\underline{a'}$, $\underline{b'}$ und $\underline{c'}$ aus den Ortsvektoren $\underline{A'}$, $\underline{B'}$ und $\underline{C'}$:

Formel 4: Komponenten der Seitenvektoren im projizierten Dreieck

$$\boxed{\begin{array}{lll} \underline{B'}+\underline{a'}=\underline{C'} & \Rightarrow & \underline{a'}=\underline{C'}-\underline{B'}=\left[x_a\ y_a\ 0\right] \\ \underline{C'}+\underline{b'}=\underline{A'} & \Rightarrow & \underline{b'}=\underline{A'}-\underline{C'}=\left[x_b\ y_b\ 0\right] \\ \underline{A'}+\underline{c'}=\underline{B'} & \Rightarrow & \underline{c'}=\underline{B'}-\underline{A'}=\left[x_c\ y_c\ 0\right] \end{array}}$$

Hinweis zu Projektionen:

Alle Vektoren (mit Apostroph) des projizierten Dreiecks A' B' C' sind Projektionen der entsprechenden Vektoren des räumlichen Dreiecks. Sie haben deshalb die ***x***- und ***y***-Koordinaten der Ortsvektoren zum Dreieck ABC (ohne Apostroph) und die ***z***-Komponenten null.

2.4 Betrag eines Vektors

Der Betrag des Vektors $\underline{a}$ ist seine zahlenmäßige Länge ***a***, es ist ein Absolutwert:

Formel 5: Betrag eines Vektors

$$\boxed{|\underline{a}| = a}$$

Beim HP-Taschenrechner wird der Betrag eines Vektors durch den Befehl **ABS** (=Absolutwert) berechnet.

2.5 Skalarprodukt zweier Vektoren

Das Skalarprodukt $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}\,\underline{b}$ wird auch inneres Produkt der Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ genannt und ist eine reine Zahl (ein Skalar!), die zur Winkelberechnung beim Dreieck verwendet werden kann. Es ist zahlenmäßig definiert als

Formel 6: Definition des Skalarprodukts

$$\boxed{\underline{a}\cdot\underline{b}=\underline{a}\,\underline{b}=|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|\cdot\cos(\gamma)=a\cdot b\cdot\cos(\gamma)},$$

wobei γ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

Stehen die Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ rechtwinklig aufeinander, so ist $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$. Für das Skalarprodukt gilt das Kommutativgesetz.

Beim HP-Taschenrechner wird das Skalarprodukt zweier Vektoren durch den Befehl **DOT** berechnet. Das Wort DOT erinnert an den Multiplikationspunkt bei $\underline{a} \cdot \underline{b}$.

Im nachfolgenden Text ergibt sich verwechslungsfrei aus dem Zusammenhang, ob der Multiplikationspunkt zu einem Skalarprodukt zweier Vektoren oder zu einem Produkt zweier Zahlen gehört.

2.6 Kreuzprodukt zweier Vektoren

Das Kreuzprodukt $\underline{a} \times \underline{b}$ zweier Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ wird auch äußeres Produkt oder Vektorprodukt genannt und ist ein Vektor, der als Normale (= Lot) auf der durch die beiden beteiligten Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ gebildeten Ebene steht. Er wird als Normalenvektor $\underline{N} = \underline{a} \times \underline{b}$ bezeichnet.

Das Kreuzprodukt ist zahlenmäßig definiert als

Formel 7: Definition des Kreuzprodukts

$$\boxed{|\underline{a} \times \underline{b}| = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \sin(\gamma) = a \cdot b \cdot \sin(\gamma)},$$

wobei γ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

Die Länge (Betrag) dieses Normalenvektors ist der Flächeninhalt des durch $\underline{a}$ und $\underline{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Die Richtung des Normalenvektors folgt einer Rechtsschraube, wenn man für ihn die Drehrichtung ausgehend von Vektor $\underline{a}$ in Richtung Vektor $\underline{b}$ wählt. Das Kommutativgesetz gilt nicht für das Kreuzprodukt, hier kommt es auf die Reihenfolge der Vektoren an.

Beim HP-Taschenrechner wird das Kreuzprodukt zweier Vektoren durch den Befehl **CROSS** berechnet. Das Wort CROSS erinnert an das Kreuzchen × bei $\underline{a} \times \underline{b}$.

Der Flächeninhalt A des im Raum liegenden Dreiecks ABC wird aus dem Kreuzprodukt zweier Seitenvektoren berechnet, es ist die Fläche des halben Parallelogramms:

Formel 8: Flächeninhalt eines Dreiecks

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot |\underline{a} \times \underline{b}| = \frac{1}{2} \cdot |\underline{b} \times \underline{c}| = \frac{1}{2} \cdot |\underline{c} \times \underline{a}|}$$

Hinweis zum Normalenvektor:
Jeder Vektor, der auf einer Ebene senkrecht steht, ist ein Normalenvektor dieser Ebene. In der Praxis kommt es meist nur auf die Richtung an, deshalb wird dann für die Flächennormale der Normalen-Einheitsvektor $\underline{n} = \frac{\underline{N}}{|\underline{N}|}$ angegeben, der zu allen Normalenvektoren $\underline{N}$ parallel ist und den Betrag **1** besitzt.

Positiver Umlaufsinn der Eckpunkte des Dreiecks

Die Eckpunkte A, B und C des Dreiecks müssen in der Reihenfolge entgegen dem Uhrzeigersinn angeordnet sein (= positiver Umlaufsinn), wenn man von oben auf das Dreieck blickt. Dann zeigt der Normalenvektor $\underline{N}$ der umlaufenden Seitenvektoren in Richtung des Beobachters, das heißt, die z-Komponente des Normalenvektors ist positiv. Dies ist für viele Berechnungen von Bedeutung.

2.7 Spatprodukt dreier Vektoren

Das Spatprodukt ist gekennzeichnet durch drei in Klammer gesetzte und durch Leerzeichen getrennte Vektoren. Es ist definiert als Skalarprodukt zwischen einem Vektor und einem Kreuzprodukt.

Formel 9. Definition des Spatprodukts

$$\boxed{(\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}) = (\underline{B}\ \underline{C}\ \underline{A}) = (\underline{C}\ \underline{A}\ \underline{B}) = \underline{A} \cdot (\underline{B} \times \underline{C}) = \underline{B} \cdot (\underline{C} \times \underline{A}) = \underline{C} \cdot (\underline{A} \times \underline{B})}$$

Nachdem das Kreuzprodukt ein Vektor ist, ist das Spatprodukt ein Skalar, also eine reine Zahl. Diese Zahl ist das Volumen des Parallelepipeds (= Spat, ein Skalar!), das durch die drei Vektoren $\underline{A}$, $\underline{B}$ und $\underline{C}$ aufgespannt wird. Das Vorzeichen des Spatprodukts ist vom Umlaufsinn der Eckpunkte im Dreieck ABC abhängig.

Wenn das Spatprodukt gleich null ist, dann gehören die drei beteiligten Vektoren zu ein und derselben Ebene (komplanar). Beim Dreieck ABC liegen die drei Seitenvektoren $\underline{\boldsymbol{a}}$, $\underline{\boldsymbol{b}}$ und $\underline{\boldsymbol{c}}$ in einer Ebene, so dass $(\underline{\boldsymbol{a}}\ \underline{\boldsymbol{b}}\ \underline{\boldsymbol{c}}) = \mathbf{0}$ ist. Diese Tatsache kann zu Plausibilitätsprüfungen verwendet werden.

Hinweis zu Volumenberechnungen:

Den sechsten Teil des Spatprodukts = $(\underline{\boldsymbol{A}}\ \underline{\boldsymbol{B}}\ \underline{\boldsymbol{C}})/6$ (= unregelmäßige Pyramide mit dem Dreieck ABC als Grundfläche und dem Koordinatenursprung als Spitze) kann man zur Volumenberechnung eines durch ein geschlossenes Dreiecksnetz umgrenzten Körpers verwenden, wobei die Vektoren Ortsvektoren sein sollen.

Die Theorie ist dem Gaußschen Integralsatz im Beitrag „Querschnittswerte“ (siehe Dokument QSW.pdf) ähnlich, hier aber nicht für die Ebene, sondern als Volumenelement für den Raum. Volumenberechnungen werden weiter unten durch Dreikantprismatoide realisiert, die bei der Projektion der Dreiecke auf die x,y-Ebene entstehen.

Für das Spatprodukt gibt es beim HP-Taschenrechner keinen eigenen Befehl. Zur Berechnung des Spatprodukts werden die drei Vektoren in den Stack gestellt und dann die Befehle **CROSS** und **DOT** hintereinander ausgeführt.

3 Das Dreieck im dreidimensionalen Raum

Das Dreieck im Raum ist durch die räumlichen Koordinaten $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ der Eckpunkte gegeben, die hier als Vektorkomponenten verwendet werden.

Das obige Bild 2 zeigt Lage, Bezeichnungen und Vektorzuordnungen im räumlichen Dreieck und im projizierten Dreieck in der $\boldsymbol{x,y}$-Ebene. Das so entstandene Dreikantprismatoid (siehe Bild 3) wird weiter unten behandelt.

3.1 Elemente im Dreieck

3.1.1 Seitenlängen

Die Längen der Dreieckseiten sind die Beträge der jeweiligen Seitenvektoren . Die Seitenlängen im Raum werden mit $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ und im Grundriss (projiziertes Dreieck in $\boldsymbol{x,y}$-Ebene) mit $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$ und $\boldsymbol{c}'$ bezeichnet.

Formel 10: Seitenlängen des Dreiecks

$$\boldsymbol{a} = |\underline{\boldsymbol{a}}|; \quad \boldsymbol{b} = |\underline{\boldsymbol{b}}|; \quad \boldsymbol{c} = |\underline{\boldsymbol{c}}|$$
$$\boldsymbol{a}' = |\underline{\boldsymbol{a}}'|; \quad \boldsymbol{b}' = |\underline{\boldsymbol{b}}'|; \quad \boldsymbol{c}' = |\underline{\boldsymbol{c}}'|$$

3.1.2 Innenwinkel im Dreieck

Die Innenwinkel im Dreieck ABC erhalten die Bezeichnungen nach Bild 3: $\boldsymbol{\alpha}$ (Innenwinkel am Eckpunkt A gegenüber der Seite $\boldsymbol{a}$), $\boldsymbol{\beta}$ (Innenwinkel am Eckpunkt B gegenüber der Seite $\boldsymbol{b}$) und $\boldsymbol{\gamma}$ (Innenwinkel am Eckpunkt C gegenüber der Seite $\boldsymbol{c}$).

Diese Winkel werden über das Skalarprodukt der Vektoren der anliegenden Seiten berechnet, siehe Formel 11 und Formel 12.

In den Gleichungen der Formel 11 und der Formel 12 ist nach obiger Definition (Formel 6) der Klammerausdruck im Zähler das Skalarprodukt und der Klammerausdruck im Nenner das Produkt der Seitenlängen.

Nach der im Bild 2 gewählten Richtungsdefinition der Seitenvektoren des Dreiecks muss für die Berechnung des Innenwinkels der Vektor, der den linken Schenkel bildet, ein negatives

Vorzeichen erhalten, damit beide Vektoren am Eckpunkt beginnen und sich der Kosinus des Innenwinkels ergibt. Ohne dieses negative Vorzeichen ergäbe sich der Außenwinkel am betreffenden Eckpunkt des Dreiecks.

Formel 11: Winkel des Dreiecks im Raum

$$\cos(\alpha) = \frac{-\underline{b}\cdot\underline{c}}{|\underline{b}|\cdot|\underline{c}|} = -\frac{\underline{b}\cdot\underline{c}}{b\cdot c}$$
$$\cos(\beta) = \frac{-\underline{c}\cdot\underline{a}}{|\underline{c}|\cdot|\underline{a}|} = -\frac{\underline{c}\cdot\underline{a}}{c\cdot a}$$
$$\cos(\gamma) = \frac{-\underline{a}\cdot\underline{b}}{|\underline{a}|\cdot|\underline{b}|} = -\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{a\cdot b}$$

Formel 12: Winkel des projizierten Dreiecks

$$\cos(\alpha') = \frac{-\underline{b}'\cdot\underline{c}'}{|\underline{b}'|\cdot|\underline{c}'|} = -\frac{\underline{b}'\cdot\underline{c}'}{b'\cdot c'}$$
$$\cos(\beta') = \frac{-\underline{c}'\cdot\underline{a}'}{|\underline{c}'|\cdot|\underline{a}'|} = -\frac{\underline{c}'\cdot\underline{a}'}{c'\cdot a'}$$
$$\cos(\gamma') = \frac{-\underline{a}'\cdot\underline{b}'}{|\underline{a}'|\cdot|\underline{b}'|} = -\frac{\underline{a}'\cdot\underline{b}'}{a'\cdot b'}$$

3.2 Flächeninhalt

Wie oben beim Kreuzprodukt schon angegeben, ist der Flächeninhalt ***A*** der halbe Betrag des Kreuzpodukts zweier Seitenvektoren des Dreiecks, also der halbe Betrag des Normalenvektors der Dreiecksebene.

Formel 13: Normalenvektor des Dreiecks

$$\underline{N} = \underline{a}\times\underline{b} = \underline{b}\times\underline{c} = \underline{c}\times\underline{a}$$

Formel 14: Flächeninhalt des Dreiecks

$$A = \frac{1}{2}\cdot|\underline{N}| = \frac{1}{2}\cdot|\underline{a}\times\underline{b}| = \frac{1}{2}\cdot|\underline{b}\times\underline{c}| = \frac{1}{2}\cdot|\underline{c}\times\underline{a}|$$

Dieser berechnete Flächeninhalt hat immer einen positiven Wert, weil der Absolutwert des Betrages immer positiv ist.

Falls man bei negativem Umlaufsinn der Eckpunkte des Dreiecks die Fläche mit negativem Vorzeichen versehen will, muss der berechnete Wert das Vorzeichen (**sign** = Signum[1]) der ***z***-Komponente des Normalenvektors bekommen.

Die Formel lautet dann:

Formel 15: Flächeninhalt mit Vorzeichen

$$A = \mathrm{sign}(z_N)\cdot\frac{1}{2}\cdot|\underline{N}| = \mathrm{sign}(z_N)\cdot\frac{1}{2}\cdot|\underline{a}\times\underline{b}| = \mathrm{sign}(z_N)\cdot\frac{1}{2}\cdot|\underline{b}\times\underline{c}| = \mathrm{sign}(z_N)\cdot\frac{1}{2}\cdot|\underline{c}\times\underline{a}|$$

Damit können in digitalen geometrischen Modellen (DGM) auch „überhängende“ Flächen (mit $\mu > 90°$) zugelassen und berechnet werden. Hier soll diese Möglichkeit aber nicht genutzt werden.

Der Flächeninhalt des projizierten Dreiecks A' B' C' beträgt

Formel 16: Flächeninhalt des projizierten Dreiecks

$$A' = \frac{1}{2}\cdot|\underline{N}'| = \frac{1}{2}\cdot|\underline{a}'\times\underline{b}'| = \frac{1}{2}\cdot|\underline{b}'\times\underline{c}'| = \frac{1}{2}\cdot|\underline{c}'\times\underline{a}'|$$

3.3 Schwerpunktlage

Der Ortsvektor $\underline{S}$ zum Schwerpunkt S des Dreiecks ABC wird aus den Ortsvektoren der Eckpunkte berechnet:

[1] **sign** ist eine Funktion, die bei positivem Vorzeichen einer Zahl den Wert 1 und bei negativem Vorzeichen den Wert -1 zurückgibt.

Formel 17: Schwerpunktvektor

$$\underline{\boldsymbol{S}} = \frac{\underline{\boldsymbol{A}} + \underline{\boldsymbol{B}} + \underline{\boldsymbol{C}}}{3} = \left[x_S \; y_S \; z_S\right]$$

Formel 18: Schwerpunktvektor des projizierten Dreiecks

$$\underline{\boldsymbol{S'}} = \frac{\underline{\boldsymbol{A'}} + \underline{\boldsymbol{B'}} + \underline{\boldsymbol{C'}}}{3} = \left[x_{S'} \; y_{S'} \; z_{S'}\right]$$

mit den Komponenten

Formel 19: Komponenten des Schwerpunktvektors

$$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$
$$y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$
$$z_S = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

Formel 20: Komponenten im projizierten Dreieck

$$x_{S'} = \frac{x_{A'} + x_{B'} + x_{C'}}{3}$$
$$y_{S'} = \frac{y_{A'} + y_{B'} + y_{C'}}{3}$$
$$z_{S'} = 0$$

Im projizierten Dreieck A' B' C' gilt:

$\boldsymbol{z_{S'} = 0}$, weil $\boldsymbol{z_{A'} = z_{B'} = z_{C'} = 0}$ und die ***x,y***-Komponenten der projizierten Vektoren $\underline{\boldsymbol{A'}}$ **,** $\underline{\boldsymbol{B'}}$ und $\underline{\boldsymbol{C'}}$ mit den ***x,y***-Komponenten der Vektoren $\underline{\boldsymbol{A}}$**,** $\underline{\boldsymbol{B}}$ und $\underline{\boldsymbol{C}}$ identisch sind.

3.4 Flächenneigung und Falllinie

Jede Dreiecksfläche ist Teil einer Ebene, weil durch zwei Dreieckseiten eine Ebene definiert ist. Die Ebene kann beliebig im Raum liegen. Die Neigung dieser Ebene zur ***x,y***-Ebene wird in der Natur in der Falllinie gemessen.

3.4.1 Neigung einer Ebene

Jeder Normalenvektor ermöglicht die Bestimmung der Fall-Linie und der Flächenneigung $\boldsymbol{\mu}$ zur ***x,y***-Ebene. Da der Normalenvektor aus den Dreieckseiten berechnet wird, hängt er von der Größe des Dreiecks ab.

Für die Berechnung wird aber der Normalen-Einheitsvektor genommen, der parallel zu allen Normalenvektoren ist und den Betrag 1 besitzt.

Er wird aus dem Normalenvektor

$$\underline{\boldsymbol{N}} = \underline{\boldsymbol{a}} \times \underline{\boldsymbol{b}} = \left[x_N \; y_N \; z_N\right]$$

berechnet:

Formel 21: Normalen-Einheitsvektor

$$\underline{\boldsymbol{n}} = \frac{\underline{\boldsymbol{N}}}{\left|\underline{\boldsymbol{N}}\right|} = \frac{\left[x_N \; y_N \; z_N\right]}{\sqrt{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2}}$$

Die Neigung des Dreiecks zur Waagrechten ist identisch mit dem Winkel, den der Normalen-Einheitsvektor mit seiner ***z***-Komponente bildet.

Außerdem gilt für den Winkel zwischen Grund- und Deckfläche eines Prismas:

Formel 22: Winkel zwischen Grund und Deckfläche

$$\boxed{A_G = A_D \cdot \cos(\mu)}$$

Für beide Fälle ergibt sich:

Formel 23: Flächenneigung der Deckfläche zur Grundfläche

$$\boxed{\cos(\mu) = \frac{A_G}{A_D} = \frac{z_n}{|\underline{n}|}}$$

Der sich ergebende Neigungswinkel μ kann positiv oder negativ sein, weil der Kosinus immer beide Vorzeichen des Winkels zulässt. Es kommt darauf an, ob man die Steigung oder das Gefälle angeben will.

3.4.2 Berechnung der Falllinie

Die Kenntnis der Falllinie ist in der Praxis für die Fließverhältnisse des Wassers auf Flächen wichtig. Wird Wasser auf eine im Raum liegende Ebene aufgebracht, so fließt es in Richtung der Fall-Linie ab. Der Ort der Fall-Linie auf einer Ebene ist lagemäßig nicht bestimmt, sondern ist von dem Punkt abhängig, von dem das Wasser wegfließt. Es fließt dann in Richtung der Falllinie.

Die Richtung der Fall-Linie ist durch die Projektion des Normalen-Einheitsvektors $\underline{n}$ auf die x,y-Ebene bestimmt. Daraus ergibt sich der Falllinienvektor $\underline{F}$:

Die Vektorkomponenten des Falllinienvektors $\underline{F}$ ergeben sich aus dem Skalarprodukt $\underline{n} \cdot \underline{F} = 0$. Diese Gleichung sagt aus, dass $\underline{F}$ rechtwinklig zu $\underline{n}$ ist. Die Falllinie ist immer rechtwinklig zur Schnittlinie der Ebene mit der x,y-Ebene.

Da der Falllinienvektor und der Normalen-Einheitsvektor die gleichen x- und y-Komponenten haben, wird nur noch die z-Komponente der Falllinie benötigt. Zu diesem Zweck wird das Skalarprodukt $\underline{n} \cdot \underline{F} = 0$ als Gleichung hingeschrieben und dann nach z_F aufgelöst:

$$\underline{n} \cdot \underline{F} = [x_n \ y_n \ z_n] \cdot [x_F \ y_F \ z_F] = x_n \cdot x_F + y_n \cdot y_F + z_n \cdot z_F = 0.$$

Aus $\boxed{x_n \cdot x_F + y_n \cdot y_F + z_n \cdot z_F = 0}$ folgt, wobei $\boxed{x_F = x_n}$ und $\boxed{y_F = y_n}$ gesetzt wird:

$$z_F = -\frac{x_n \cdot x_F + y_n \cdot y_F}{z_n} = -\frac{-(x_n^2 + y_n^2)}{z_n}.$$

Formel 24: Falllinienvektor

$$\boxed{\underline{F} = [x_F \ y_F \ z_F] = \left[x_n \ ; y_n \ ; \frac{-(x_n^2 + y_n^2)}{z_n} \right]}.$$

Die Neigung μ der Ebene zur x,y-Ebene ergibt sich auch aus der Gleichung:

Formel 25: Neigung der Ebene

$$\boxed{\sin(\mu) = \frac{z_F}{|\underline{F}|}}$$

Da es sich um die Falllinie handelt und z_F immer nach unten zeigt, wird μ als negativer Winkel ausgegeben.

Das Kreuzprodukt $\underline{n} \times \underline{F}$ ergibt den Vektor parallel zur Schnittlinie der beiden Ebenen.

3.5 Sonstige Dreieckswerte

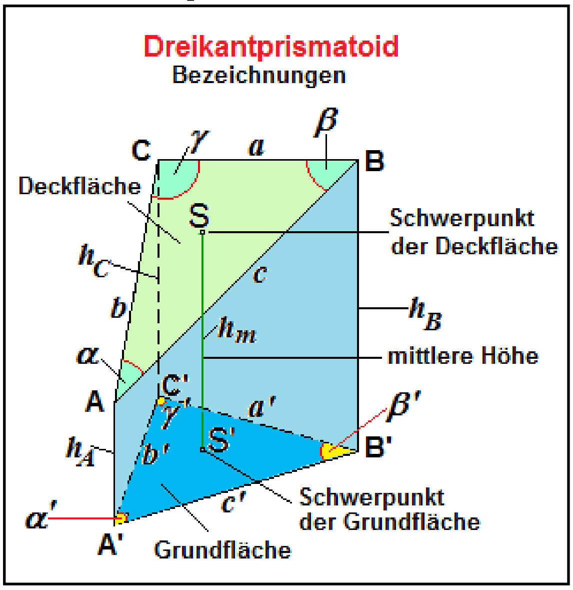
Die restlichen Werte des Dreiecks, wie Umfang, Inkreisradius, Umkreisradius und lotrechte Höhe auf die jeweilige Seite können aus den nun bekannten Seitenlängen über die auf der Internetseite des Verfassers im Beitrag „Dreiecke berechnen“ angebotenen HP-Programme ermittelt werden.

Dabei ist zu beachten, dass Umkreis und Inkreis des im Raum liegenden Dreiecks bei der Projektion auf die ***x,y***-Ebene zu Ellipsen werden.

4 Das Dreikantprismatoid

4.1 Definition

Bild 3: Dreikantprismatoid



Das Dreikantprismatoid wird als schräg abgeschnittenes Dreikantprisma definiert, das lotrecht auf der ***x,y***-Ebene steht. Beim vollständigen Prisma sind Grund- und Deckfläche parallel, beim Dreikantprismatoid nicht.

Das Dreikantprismatoid wird durch ein im Raum liegendes Dreieck oben (= Deckfläche) und durch dessen Projektion auf die waagrechte x,y-Ebene unten (Grundfläche) abgeschlossen (Bild 3). Alle senkrechten Kanten mit den Längen h_A, h_B und h_C sind zueinander parallel.

Das Dreikantprismatoid wird bei digitalen geometrischen Modellen zur Berechnung von Oberflächen (Abwicklungen) und Rauminhalten (Volumina, Kubaturen) als Basiselement verwendet. Dort wird allerdings vereinfachend von „Prismen“ gesprochen, wobei das im Bild 3 gezeigte oben schräg abgeschnittene Prisma (Prismatoid) gemeint ist. Die Grundfläche steht rechtwinklig zu den Seitenkanten.

Wenn im nachfolgenden Text vereinfachend von „Prismen“ oder „Dreikantprismen“ gesprochen wird, so ist immer das Prismatoid nach Bild 3 damit gemeint.

4.2 Deckfläche

Die das Prismatoid oben abschließende Fläche (das im Raum liegende Dreieck) wird Deckfläche A_D des Prismatoids genannt. Der Flächeninhalt A_D der Deckfläche wird aus dem Kreuzprodukt zweier Seitenvektoren des Dreiecks berechnet:

Formel 26: Deckfläche

$$\boxed{A_D = \frac{1}{2}\cdot\left|\underline{a}\times\underline{b}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\underline{b}\times\underline{c}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\underline{c}\times\underline{a}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\underline{N}\right|}$$

4.3 Grundfläche

Die Projektion der Deckfläche auf die x,y-Ebene wird Grundfläche genannt.

Der Flächeninhalt A_G der Grundfläche ist die Projektion der Deckfläche A_D auf die ***x,y***-Ebene:

Formel 27: Grundfläche

$$\boldsymbol{A_G} = \frac{1}{2} \cdot \left| \underline{\boldsymbol{a}}' \times \underline{\boldsymbol{b}}' \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \underline{\boldsymbol{b}}' \times \underline{\boldsymbol{c}}' \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \underline{\boldsymbol{c}}' \times \underline{\boldsymbol{a}}' \right|$$

4.4 Prismatoidenformel

Die Prismatoidenformel wird nur der Vollständigkeit halber angegeben. Für die Berechnung eines DGM über Prismen ist sie nicht geeignet, weil sie parallele Flächen fordert, die im DGM konstruiert werden müssen (siehe Abschnitt 4.5.2).

4.4.1 Definition und Formel

Ein Prismatoid ist ein geometrischer Körper, der durch parallele Vielecke (als Grund- und Deckfläche) sowie durch Dreiecke oder Trapeze (als Seitenflächen) begrenzt ist (siehe Bild 3). Beim Prismatoid müssen im Gegensatz zum Prisma Grund- und Deckfläche nicht kongruent sein und müssen auch nicht die gleiche Eckenzahl haben.

Wenn $\boldsymbol{h}$ die Höhe des Prismatoids, $\boldsymbol{A_G}$ die Grundfläche, $\boldsymbol{A_D}$ die zur Grundfläche parallele Deckfläche und $\boldsymbol{A_M}$ die parallele Mittelfläche in der Hälfte der Höhe $\boldsymbol{h}$ zwischen Grund- und Deckfläche ist, die rechtwinklig zur Höhe $\boldsymbol{h}$ sind, dann gilt für das Volumen $\boldsymbol{V}$ eines Prismatoids die Formel

Formel 28: Prismatoidenformel

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{h}}{6}\left(\boldsymbol{A_G} + 4 \cdot \boldsymbol{A_M} + \boldsymbol{A_D}\right)$$

Zitat aus Wikipedia[2]: „Dies ist eine der berühmtesten und universellsten Volumenformeln. Zu Ehren ihres Entdeckers *Johannes Kepler* heißt sie Keplersche Fassregel“ (Zitatende).

Die Seitenflächen des Prismatoid können eben oder gewölbt sein, allerdings dürfen keine Knicke in den Flächen vorkommen (mathematisch gesehen: keine Unstetigkeiten).

Dann kann man das Volumen verschiedenster Körper damit berechnen, natürlich auch Fässer.

4.4.2 Kugel als Prismatoid berechnen

Man kann sogar das Kugelvolumen mit dieser Formel berechnen, wenn man den Scheitelpunkt als Deckfläche $\boldsymbol{A_D} = 0$, den unteren Punkt als Grundfläche $\boldsymbol{A_G} = 0$ und die Schnittfläche, die durch den Mittelpunkt geht, als Mittelfläche $\boldsymbol{A_M} = \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r}^2$ nimmt, wobei $\boldsymbol{r}$ der Kugelradius ist. Die Höhe $\boldsymbol{h} = 2r$. Das Kugeklvolumen ist dann: $\boxed{\boldsymbol{V_{Ku}} = \frac{2 \cdot \boldsymbol{r}}{6} \cdot (0 + 4 \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r}^2 + 0) = \frac{4}{3} \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{r}^3}$.

4.4.3 Kegel als Prismatoid berechnen

$$\boldsymbol{A_D} = 0; \quad \boldsymbol{A_M} = \left(\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2 \cdot \boldsymbol{\pi}; \quad \boldsymbol{A_G} = \boldsymbol{r}^2 \cdot \boldsymbol{\pi}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_{Ke}} = \frac{\boldsymbol{h}}{6} \cdot \left(0 + 4 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{2}\right)^2 \cdot \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{r}^2 \cdot \boldsymbol{\pi}\right) = \frac{\boldsymbol{h}}{3} \cdot \boldsymbol{r}^2 \cdot \boldsymbol{\pi} \cdot}$$

[2] Siehe den Artikel „Prismatoid“ in der deutschen WIKIPEDIA.

4.5 Volumen des Dreikantprismatoids

Das Volumen des Prismatoids, so wie wir es beim DGM benutzen, wird aus Grundfläche A_G und mittlerer Höhe h_m nach Bild 3 und Bild 4 berechnet:

Formel 29: Volumen A_G und h_m

$$\boxed{V = A_G \cdot h_m}\ .$$

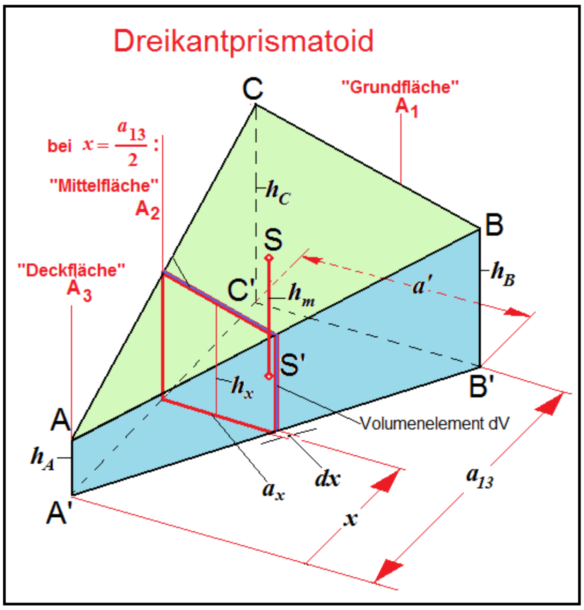
Die mittlere Höhe h_m des Dreikantprismatoids ist das arithmetische Mittel der drei senkrechten Kantenlängen h_A, h_B und h_C :

Formel 30: Mittlere Höhe

$$\boxed{h_m = \frac{h_A + h_B + h_C}{3}}\ .$$

4.5.1 Erster mathematischer Beweis für die mittlere Höhe

Bild 4: Dreikantprismatoid, Berechnungsvariablen



Die Gültigkeit der Formel 30 wird nachfolgend streng mathematisch bewiesen. Dazu werden in Bild 4 alle erforderlichen Variablen und geometrischen Voraussetzungen festgelegt:

Das Volumenelement $\boxed{dV = a_x \cdot h_x \cdot dx}$ in Bild 4 dient als Ansatz. Das Integral aller dieser Volumenelemente für alle x aus $0 \le x \le a_{13}$ stellt das Gesamtvolumen des Prismatoids dar. Wenn dieses Gesamtvolumen V durch das Integral aller Teilflächen $\boxed{dA = a_x \cdot dx}$ dividiert wird, ergibt sich daraus die mittlere Höhe h_m des Dreikantprismatoids nach Bild 4.

Nun müssen noch die Gleichungen für alle von x abhängigen Variablen auf Grund von Bild 4 aufgestellt werden:

a_x ist die Breite des Dreiecks an der Stelle x: $\boxed{a_x = a' \cdot x}$.

a_{13} steht rechtwinklig auf a' und ist die Höhe des Dreiecks A' B' C' in Bezug auf seine Grundlinie a'.

dx ist die Dicke des Volumenelements, die bei der Integration gegen null geht.

h_x ist die mittlere Höhe des Volumenelements an der Stelle x:

$$\boxed{h_x = \frac{1}{2} \cdot \left(h_A + \frac{h_B - h_A}{a_{13}} \cdot x + h_A + \frac{h_C - h_A}{a_{13}} \cdot x \right) = \frac{1}{2} \cdot \left[2h_A + \frac{x}{a_{13}} (h_B + h_C - 2h_A) \right]}$$

Der mathematische Ansatz für die mittlere Höhe lautet:

Formel 31: Integrale für die mittlere Höhe

$$h_m = \frac{\int_0^{a_{13}} a_x \cdot h_x \,dx}{\int_0^{a_{13}} a_x \,dx} = \frac{\int_0^{a_{13}} x \cdot h_x \,dx}{\int_0^{a_{13}} x \,dx} = \frac{\int_0^{a_{13}} x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[2h_A + \frac{x}{a_{13}}\left(h_B + h_C - 2h_A\right)\right] dx}{\int_0^{a_{13}} x \,dx};$$

$$h_m = \frac{\frac{1}{2} \cdot \int_0^{a_{13}} \left[2 \cdot h_A \cdot x + \frac{x^2}{a_{13}}\left(h_B + h_C - 2h_A\right)\right] dx}{\int_0^{a_{13}} x \,dx} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot h_A \cdot \frac{a_{13}^2}{2} + \frac{a_{13}^3}{3 \cdot a_{13}}\left(h_B + h_C - 2h_A\right)\right]}{\frac{a_{13}^2}{2}}$$

$$h_m = \frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot h_A + \frac{2}{3}\left(h_B + h_C - 2h_A\right)\right] = \left[h_A + \frac{1}{3}\left(h_B + h_C - 2h_A\right)\right] = \frac{1}{3}\left(3h_A + h_B + h_C - 2h_A\right)$$

$$h_m = \frac{h_A + h_B + h_C}{3}$$ q.e.d. (quod erat demonstrandum = *was zu beweisen war*).

Da sich die Variablen a' und a_{13} herauskürzten, hätten wir gleich dafür den Wert 1 setzen können. Dann wäre aber der Beweis schlechter nachzuvollziehen gewesen.

4.5.2 Zweiter mathematischer Beweis für die mittlere Höhe

Der zweite mathematische Beweis für die mittlere Höhe h_m wird mit der Prismatoidenformel durchgeführt. Dazu müsste zuerst die Primatoidenformel bewiesen werden. Da der allgemeine Beweis dieser Formel sehr umfangreich und nicht einfach ist, ersparen wir uns die Mühe und setzen voraus, dass die Primatoidenformel (irgendwo in der mathematischen Literatur) schon bewiesen worden und deshalb gültig ist.

Da unser oben in Bild 3 gezeigtes Dreikantprismatoid keine parallelen Grund- und Deckflächen hat, können wir das Volumen mit der Prismatoidenformel nur dann berechnen, wenn wir eine Seitenfläche als „Grundfläche" A_1 benutzen (siehe Bild 4). Die dieser Seitenfläche gegenüberliegende Kante ist dann die „Deckfläche" A_3, die hier null ist, weil sie nur aus einer zur „Grundfläche" parallelen Linie besteht. Die Fläche auf halber Höhe bei $x = \frac{a_{13}}{2}$ bezeichnen wir als „Mittelfläche" A_2.

Nun können wir das Volumen des Dreikantprismatoids berechnen:

Formel 32: Prismatoidenformel

$$V = \left(A_1 + 4 \cdot A_2 + A_3\right) \cdot \frac{a_{13}}{6}.$$

Wenn wir das Volumen der Formel 29 mit dem Volumen der Formel 32 gleichsetzen, erhalten wir:

Formel 33: Gleichsetzung der Volumina

$$V = \left(A_1 + 4 \cdot A_2 + A_3\right) \cdot \frac{a_{13}}{6} = A_G \cdot h_m$$

Dabei wird Bild 4 zu Grunde gelegt.

Wir berechnen die drei Flächen des Dreikantprismatoids, die senkrecht auf der Grundfläche stehen und parallel sein müssen.

$$A_1 = \frac{h_B + h_C}{2} \cdot a'$$ (= senkrechte Seitenfläche über der Dreieckseite ***a'***),

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{h_C + h_A}{2} + \frac{h_B + h_A}{2} \right] \cdot \frac{a'}{2}$$ (= Mittelfläche zwischen A_1 und A_3) und

$A_3 = 0$ (= senkrechte Kante mit h_A über der Ecke A' des Dreiecks der Grundfläche).

$A_G = \frac{a' \cdot a_{13}}{2}$ ist die waagrechte Grundfläche des Dreikantprismatoids, a_{13} ist der Abstand der Flächen A_1 und A_3, also die Höhe des Dreiecks A' B' C' auf seine Grundlinie ***a'***.

Werden nun die Gleichungen für die Flächen A_1, A_2, A_3 und A_G in die Formel 33

$$V = (A_1 + 4 \cdot A_2 + A_3) \cdot \frac{a_{13}}{6} = A_G \cdot h_m$$ eingesetzt,

dann ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$(h_A + h_B + h_C) \cdot \frac{a_{13}}{6} \cdot a' = \frac{a' \cdot a_{13}}{2} \cdot h_m$$.

Die Maße a_{13} und ***a'*** und der Nenner der rechten Seite kürzen sich heraus und übrig bleibt die oben angegebene Formel 30:

$$\boxed{h_m = \frac{h_A + h_B + h_C}{3}}$$, q.e.d.

Die Prismatoidenformel ist für die unten beschriebenen Zwecke der Volumenermittlung nicht geeignet, deshalb wurde der einfachere Weg über Grundfläche und mittlere Höhe gewählt.

Man bedenke, dass die Kantenlängen h_A, h_B und h_C zugleich auch die ***z***-Komponenten z_A, z_B und z_C der Ortsvektoren zu den Eckpunkten A, B und C der Deckfläche sind. Die mittlere Höhe h_m ist also mit der Komponente $z_S = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$ des Schwerpunktvektors **<u>S</u>** der Deckfläche identisch.

Die Länge der geraden Verbindungslinie der Schwerpunkte von Grund- und Deckfläche ist die mittlere Höhe.

Achtung!
Der Körperschwerpunkt des Prismatoids liegt normalerweise nicht auf dieser Verbindungslinie. Nur im Sonderfall $h_A = h_B = h_C$ liegt er auf dieser Linie.

Das Volumen eines Dreikantprismatoids wird hier aus Grundfläche und mittlerer Höhe berechnet, wobei die z_S-Komponente des Schwerpunktvektors der Deckfläche eingesetzt wird:

Formel 34: Volumen aus Grundfläche und Schwerpunktvektorkomponente

$$\boxed{V = A_G \cdot h_m = A_G \cdot z_S = A_G \cdot \frac{z_A + z_B + z_C}{3}}$$.

4.5.3 *Anschaulicher Beweis für die mittlere Höhe*

Einen anschaulichen Beweis liefern drei identische Dreieckprismatoide, die so gedreht und übereinander gestellt werden, dass jeweils die drei Seiten h_A, h_B und h_C eine Kante des neu entstehenden Prismatoids bilden.

Dabei soll angenommen werden, dass jedes Prismatoid aus dünnen Schichten parallel zu einer Seitenfläche besteht, die senkrecht verschieblich sind. Durch die Verschiebung der Schichten gegeneinander bleibt das Volumen gleich. Das Volumen ändert sich nicht, wenn eine zur gegenüberliegenden Seitenfläche parallele Kante eines Körpers längs verschoben wird.

Da nun jede Kante des aus drei Prismatoiden aufgebauten neuen Körpers aus der Summe der Seiten $\boldsymbol{h_A}+\boldsymbol{h_B}+\boldsymbol{h_C}$ gebildet wird, ist ein echtes Prisma mit der dreifachen mittleren Höhe des einzelnen Prismatoids entstanden. Damit ist die Formel 30 anschaulich bewiesen.

5 Dreiecksnetze im Raum

5.1 Einleitung

Dreiecksnetze sind die Grundlage vieler digitaler Grafiksysteme. Ein theoretisches Berechnungsmodell „Digitales Geometrisches Modell (DGM)“ funktioniert nach dem Prinzip der räumlichen Dreiecksnetze und verwendet Dreikantprismatoide (Prismen).

Die Abkürzung DGM wird auch für die in der Praxis realisierten Modelle „Digitales Geländemodell“ und „Digitales Gebäudemodell“ verwendet. Das sind konkrete praktische Anwendungen dieser Berechnungsmodelle im Bereich des Vermessungswesens, des Tiefbaus und der Gebäudebewirtschaftung.

5.2 Punkte im Raum

Geländeoberflächen und Oberflächen von unregelmäßigen Körpern (beliebig geformte Gegenstände) sind keine mathematischen Flächen und lassen sich deshalb nicht ohne Vorarbeiten mathematisch erfassen.

Geländeoberflächen müssen Punkt für Punkt durch ein Flächennivellement erfasst werden. Dazu werden vom Ingenieur die zu messenden Punkte so festgelegt, dass die Geländeoberfläche zwischen benachbarten Punkten geradlinig verläuft.

Für die Lage und Höhe werden örtliche räumliche Koordinatensysteme oder landesweit genormte geodätische Koordinaten- und Höhensysteme verwendet. Für die Lagevermessung kommen Gauss-Krüger-Koordinaten in Frage. Für die Höhenmessung dient die Meeresspiegelhöhe, deren Bezugsebene (Nullhorizont, Normal-Null-Marke) landesweit einheitlich festgelegt ist.

Auch die Landesvermessung stützt sich auf Dreiecksnetze (Triangulation). Musste man früher fotografische Aufnahmen (Luftbilder) noch mühsam über photogrammetrische Geräte abtasten und Lagepunkte und Höhenlinien Punkt für Punkt aufs Papier übertragen, so geschieht neuerdings die Auswertung über automatische Bildverarbeitung im Computer. Satellitenbilder unterstützen die Vermessung und die Navigation. Über geografische Satellitenpositionssysteme (GPS) kann für jeden Punkt der Erde über tragbare Geräte vom Boden aus die genaue Position nach geografischer Länge und Breite und die geodätische Höhe bestimmt werden.

Die Oberflächen unregelmäßiger Körper können Punkt für Punkt von Hand gemessen oder durch optische Scanner automatisch abgetastet werden. Dabei werden ebenfalls räumliche Koordinaten von Einzelpunkten erfasst. Auch die Zeichenbretter sind aus den Konstruktionsbüros verschwunden und haben den CAD-Systemen (CAD = computer aided design = computer-unterstütztes Konstruieren) Platz gemacht, die intern auch mit kleinen mathematisch erfassbaren Zeichnungselementen (so genannte „Primitive“ wie Punkte, Linien, Flächenelemente) arbeiten.

5.3 Dreiecke im Raum

Die koordinatenmäßig gemessenen Punkte sind für sich allein nicht mathematisch behandelbar. Man kann sie zwar grafisch erfassen, indem man sie in einen Lageplan einträgt. Um aber die Form der Oberfläche sichtbar werden zu lassen, muss der Verlauf der Oberfläche von einem Punkt zum benachbarten sichtbar werden. Deshalb werden die Punkte der gemessenen Oberfläche zu mathematisch erfassbaren Figuren zusammengefasst. Die einfachste Figur ist ein Dreieck, denn drei Punkte bestimmen eine Ebene. Diese Dreiecke nennt man Flächenelemente.

Bei der Geländevermessung werden auf diese Weise digitale geometrische Modelle (DGM) erzeugt.

Bei der Vermessung von Gegenständen werden beliebig kleine ebene (Dreiecke) verwendet. Diese Elemente nennt man „finite Elemente“, welche die Grundlage der „Finite Elemente-Methode (FEM)“ sind. Auf diese Weise werden beliebig geformte Baukörper (Brücken, Tunnelquerschnitte) oder Bauteile (Maschinenteile) einer mathematisch korrekten statischen Berechnung zugänglich.

5.4 Erzeugung von Dreiecksnetzen in der Ebene

Jedes räumliche Dreiecksnetz lässt sich auf eine Ebene (Grundriss, Lageplan, topografische Karte) projizieren und kann dann als ebenes Dreiecksnetz mathematisch untersucht werden.

Die bei der Geländeaufnahme (Flächennivellement) erzielten Punktkoordinaten werden in einen Lageplan eingezeichnet. Nun können benachbarte Punkte so verbunden werden, dass Dreiecke entstehen.

Man geht dabei so vor, dass man von einer Dreiecksseite zwei Linien zu einem weiteren Punkt zeichnet.

Die Dreiecksnetze zeichnet man am besten maßstäblich auf Papier, für Punktkoordinaten und Dreiecke legt man Tabellen an und überprüft vor der Eingabe in den Computer alle Werte anhand der Geländeaufnahme auf Plausibilität und Korrektheit.

Dabei müssen die Dreiecksnetze korrekt gebildet werden. Eckpunkte eines Dreiecks dürfen nicht im Innern eines anderen Dreiecks liegen (keine Überlappung, keine Überdeckung). Die Seiten des einen Dreiecks dürfen sich nicht mit den Seiten eines anderen Dreiecks desselben Dreiecksnetzes schneiden.

Es gibt auch komplizierte mathematische Verfahren zur automatischen Erzeugung von ebenen Dreiecksnetzen aus einer vorgegebenen Punktmenge, das nach diesem Prinzip die Linien zieht und das Netz zugleich optimiert.

5.5 Anwendung in der Praxis

Der praktische Zweck dieses Modells ist neben der möglichst wirklichkeitsnahen Abbildung der Geländeoberfläche im Computer die genaue Berechnung der Oberflächen, Grundflächen und Volumina für die Abrechnung von Bauleistungen.

Für professionelle Berechnungen verwendet man ein DGM-Programmsystem auf dem Computer, wobei die Ergebnisse dann als Tabellen ausgedruckt werden können.

Für das Bauwesen wurde das Prinzip zur Berechnung von Mengen, Grund- und Oberflächen aus Prismen vor etwa 30 Jahren in die „Richtlinien für die elektronische Bauabrechnung (REB)“ aufgenommen und als REB-Verfahrensbeschreibung REB-VB 22.013 vom *Gemeinsamen Ausschuss für Elektronik im Bauwesen (GAEB)* herausgegeben. Die REB-VB 22.013

ist inzwischen neu bearbeitet worden (siehe www.GAEB.de, Stichwörter „Verfahrensbeschreibung“ und „Prismen“).

5.5.1 Das REB-Verfahren 22.013

Das REB-Verfahren 22.013 ist im Prinzip ein digitales Geländemodell. Es arbeitet mit Dreiecksnetzen und Horizonten, wobei ein Horizont eine beliebige Geländeoberfläche ist, die aus ebenen Flächenstücken (Dreiecken) zusammengesetzt ist.

5.5.2 Dreiecksnetze und Bezugsebene

Das digitale Geländemodell (DGM) baut auf einem digitalen geometrischen Modell auf, das mathematisch formulierbar ist. Der Aufbau von DGM stützt sich auf Dreiecksnetze im dreidimensionalen Raum.

5.5.2.1 Horizont

Eine nicht unbedingt ebene Fläche im Raum (Geländeoberfläche, Berghang) wird durch Punkte und einem darauf aufbauenden räumlichen Dreiecksnetz abgebildet. Dieses Dreiecksnetz wird als Horizont bezeichnet.

5.5.2.2 Bezugsebene

Alle Dreiecksnetze desselben Geländemodells (DGM) werden auf eine gemeinsame waagrechte Bezugsebene (vorzugsweise ***x,y***-Ebene) projiziert, so dass für jedes Dreieck ein Dreikantprismatoid (Prisma) nach Bild 3 entsteht. Diese Bezugsebene gilt für alle Horizonte eines DGM.

5.5.3 Prinzip der Volumenberechnung aus Prismen

Zwischen jedem Dreiecksnetz im Raum und der Bezugsebene kann die Summe der Prismenvolumina berechnet werden.

Werden für eine Berechnung mehrere Horizonte angelegt (ursprüngliches Gelände, abgetragenes Gelände, Baugrube, Berghang nach Bergrutsch), so werden die dazwischen befindlichen Kubaturen (Volumina der Schichten) aus den Differenzen der Summen der Prismenvolumina der jeweiligen Horizonte berechnet.

Bild 5: Horizonte beim REB-Verfahren 22.013

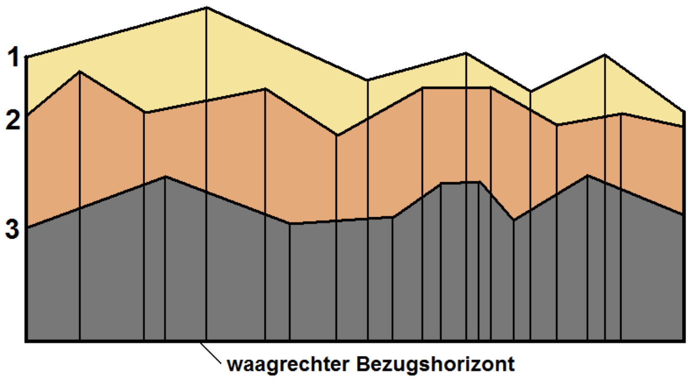


Bild 5 zeigt einen senkrechten Schnitt durch das Gelände. Im Bild gibt es drei Horizonte, die mit 1, 2, 3 bezeichnet sind. Zwischen den Horizonten liegen Erdschichten, deren Kubaturen[3] zu berechnen sind. Jeder Horizont ist durch ein eigenes Dreiecksnetz in Lage und Höhe genau festgelegt. Jedes Dreieck wird durch die drei Punktnummern der Eckpunkte definiert. Die Eckpunkte eines Dreiecks sind durch Lagekoordinaten und Höhenkoten eindeutig bestimmt. Bedingung ist, dass die Dreiecksnetze aller Horizonte einen gemeinsamen Umriss im Lageplan haben.

Aus jedem Dreieck eines bestimmten Horizonts wird ein Prisma gebildet, das vom jeweiligen Horizont senkrecht bis zum untersten waagrechten Bezugshorizont reicht. Für jedes Prisma wird das Volumen, die obere Dreiecksfläche (Deckfläche) im Gelände und die untere Drei-

[3] Kubatur = Volumen

ecksfläche (Grundfläche) auf dem waagrechten Bezugshorizont berechnet. Die Summe der Prismenvolumina ist die Gesamtkubatur des betreffenden Horizonts.

Subtrahiert man die Summe der Prismen eines darunter liegenden Horizontes, so erhält man die Kubatur, die zwischen diesen beiden Horizonten liegt. Die genaue Oberfläche eines Horizonts ergibt sich als Summe der Deckflächen der Prismen dieses Horizonts.

So ergibt sich in Bild 5 die Kubatur der obersten Schicht aus der Differenz der Prismensummen der Horizonte 1 und 2, der mittleren Schicht aus der entsprechenden Differenz der Horizonte 2 und 3. Die Kubatur der untersten Schicht ist die Prismensumme des Horizonts 3.

5.5.4 Daten

Bei Oberflächen im Gelände müssen die Punkte so festgelegt werden, dass die dadurch bestimmten Dreiecke annähernd eben sind. Wenn die Punkte sehr eng gelegt werden, dann wird die Abbildung des wirklichen Geländes durch das Dreiecksnetz genauer und auch der rechnerische Aufwand größer. Der Ingenieur entscheidet bei der Geländeaufnahme (= Vermessung des Geländes, Bestimmung von Lage und Höhe der Punkte, z. B. mit Tachymeter) durch die Wahl der Lage und der Anzahl der Punkte über die spätere Genauigkeit der Berechnung.

5.5.5 Koordinatensystem

Man verwendet hier üblicherweise ein örtliches Koordinatensystem und ein örtliches Höhensystem. Wer seine Berechnungen unbedingt in Landeskoordinaten und im Normal-Null-Höhensystem (Höhen über NN) durchführen will, sollte bedenken, dass wegen der großen Zahlenwerte die Eingaben und Ergebnisse fehleranfällig werden und die Ergebnisse auch nicht genauer ausfallen, wenn viele unnötige Ziffern mitgeschleppt werden. Die Prismen haben bei Verwendung der Höhen über NN eine mittlere Höhe von mehreren hundert Metern.

Der waagrechte Bezugshorizont sollte dann etwa 1 m unter der minimalen Kote festgelegt werden.

5.6 Computerberechnung auf dem PC

Der Verfasser hat vor etwa 25 Jahren ein Digitales Geländemodell nach REB-VB 22.013 in FORTRAN77 für die Verwendung auf dem PC programmiert. Ursprünglich lief es auf MSDOS und UNIX. Es läuft aber auch im DOS-Fenster von Windows und in der DOS-BOX auf höheren Windows-Systemen[4].

Für untenstehendes Beispiel wird dieses PC-Programm zur Vergleichsrechnung herangezogen.

Auf dem Computer werden zur Berechnung zwei Dateitypen erstellt:

1. Eine Koordinatendatei mit den Koordinaten aller Punkte und
2. für jeden Horizont eine Datei, jeweils mit allen Dreiecken des Horizonts und den jeweils zu den Dreiecken gehörenden Eckpunktbezeichnungen.

Damit sind die Dreikantprismen und die Dreiecksnetze eindeutig bestimmt.

Bei der Berechnung werden die Volumina der Prismen jedes Horizonts berechnet und aufsummiert. Die Differenz zweier Horizonte ergibt die Gesamtkubatur der bewegten Erdmassen dieser Schicht. Die Summe der Deckflächen aller Prismen eines Horizonts ergibt die Abwicklung (z. B. echte Rasenfläche, die zu mähen ist).

---

[4] Der Verfasser ist bereit, dieses Programmsystem für den PC kostenlos an Interessenten abzugeben, wenn sie sich per E-Mail melden und den vorgesehenen Einsatzfall schildern. Für MSDOS bis Windows (DOS-Fenster oder DOS-BOX) liegt eine kompilierte lauffähige Version vor, für andere Systeme kann auch der FORTRAN77-Quellcode abgegeben werden.

Derartige DGM-Berechnungsprogramme können nicht nur Geländemodelle, sondern auch Gebäudemodelle berechnen. Nach Eingabe von Gebäudeoberfläche und den inneren Grund- oder Geschoßflächen als Dreiecksnetze lassen sich insbesondere für unregelmäßige Baukörper „umbauter Raum“, Dachflächen, Wandflächen, Rauminhalte und andere wichtige Werte ermitteln.

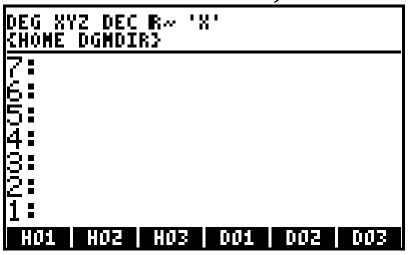
5.7 Programme für den HP-Taschenrechner

Der Verfasser stellt seine Taschenrechnerprogramme zur Berechnung eines DGM als HP-Verzeichnis **DGMDIR.txt** auf seiner Internetseite zur Verfügung. Auch im Anhang ist dieser Quelltext abgedruckt.

Voraussetzung für die erfolgreiche Anwendung dieser HP-Programme ist, dass der Anwender den HP-Taschenrechner kennt und sich mit der Programmierung und Anwendung vertraut gemacht hat.

Bild 6: Menü DGMDIR, Seite 1

Bild 7: Menu DGMDIR, Seite 2



DGMDIR.txt enthält folgende Programme und Variablen (siehe auch Bild 6 und Bild 7):

Tabelle 2: Programmnamen und Variablennamen

Variablen	Bedeutung
DGMCALC	Programm zur umfassenden Berechnung zweier Dreiecksnetze (Horizonte) mit Ausgabe der Gesamtsummen der Oberflächen, Grundflächen, Prismenvolumina und dem Differenzvolumen (= Kubatur) zwischen den beiden Horizonten.
ERGDGM	Programm für die Ausgabe der Ergebnisse von **DGMCALC** in einem Auswahlmenü.
PRISM	Programm zur ausführlichen Einzelberechnung eines Dreikantprismatoids.
ERGPR	Programm für die Ausgabe der Ergebnisse von **PRISM** in einem Auswahlmenü.
PRS	Unterprogramm zu **DGMCALC** zur Berechnung eines Dreikantprismatoids, wird auch von PRISM aufgerufen.
Info	Impressum mit Programmbezeichnung, Versionsdatum, Autor und Internetadresse.
Die folgenden 40 Variablen gehören zu dem unten behandelten ausführlichen DGM-Beispiel. Die in diesen Variablen gespeicherten Werte und Objekte sind den Tabellen zu entnehmen. Diese Variablen können gelöscht werden, wenn das Beispiel nicht mehr gebraucht wird.	
H01 bis **H03**	Jede Variable dieses Typs enthält eine Liste mit den Namen der Dreiecke, die den jeweiligen Horizont (Dreiecksnetz) bilden.
D01 bis **D24**	Jede Variable dieses Typs enthält eine Liste mit den Namen der drei Punkte, die ein Dreieck bilden.
P01 bis **P13**	Jede Variable dieses Typs enthält einen Ortsvektor zu dem bezeichneten

Variablen	Bedeutung
	Punkt.

DGMDIR als HP-Bibliothek?

Hier wurde darauf verzichtet, die Programme als HP-Bibliothek[5] zusammenzufassen, weil es sonst Schwierigkeiten beim Übertragen auf den HP-Taschenrechner gibt. Die Bibliothek darf nicht vor dem Verzeichnis DGM geladen und angebunden werden, sonst lässt sich das Verzeichnis DGM nicht mehr laden, der berühmte Fehler „Invalid Name“ tritt dann auf.

Bei Bedarf kann sich der Anwender selbst diese Bibliothek herstellen.

5.7.1 Programme zur Berechnung eines Dreikantprismatoids

Alle hier zur Verfügung gestellten HP-Taschenrechner-Programme laufen im RPN-Modus [6].

Teilweise weichen die Variablennamen von den in obigen Formeln verwendeten Formelzeichen etwas ab, weil auf dem HP-Taschenrechner für Namen keine Indizes und Apostrophe verwendet werden dürfen.

5.7.1.1 PRISM

PRISM (Prismenberechnung) ist das ausführliche Programm zur Einzelberechnung eines Dreikantprismatoids. Es berechnet die wichtigen Ergebniswerte, speichert sie als Variablen im aktuellen Verzeichnis zur weiteren Verwendung ab. Das Programm erwartet zu Beginn im Stack die drei Ortsvektoren $\underline{\mathbf{A}}$, $\underline{\mathbf{B}}$ und $\underline{\mathbf{C}}$ zu den Eckpunkten eines im Raum liegenden Dreiecks. Es nimmt die drei Vektoren vom Stack und berechnet nach den oben angegebenen Formeln folgende 21 Ergebnisvariablen:

Tabelle 3: Variablennamen des Unterprogramms PRISM

Variable im HP-Taschenrechner	Bedeutung in den Formeln
Deckfläche	
DFl	Flächeninhalt A_D
Da, Db, Dc	Seitenlängen a, b und c
Dcosα, Dcosβ, Dcosγ	Kosinus der Innenwinkel α, β und γ an den Eckpunkten A, B und C
NV	Normalenvektor $\underline{N} = \underline{a} \times \underline{b}$
FallV	Fall-Linienvektor $\underline{F}$
cosμ	Kosinus der Neigung μ
DSwV	Schwerpunktvektor $\underline{S}$
Grundfläche	
GFl	Flächeninhalt A_G
Ga, Gb, Gc	Seitenlängen a', b' und c'

[5] Diese Taschenrechner-Bibliotheken fassen Programme zu einer Library (LIB) zusammen, die als eigenes Programmobjekt wirken. Sie sind beschrieben im Beitrag „Bibliotheken“ im HP-Ordner auf der Internetseite des Verfassers

[6] Umgekehrte polnische Notation: RPN = reverse polish notation

Variable im HP-Taschenrechner	Bedeutung in den Formeln
Gcosα, Gcosβ, Gcosγ	Kosinus der Innenwinkel α', β' und γ' an den Eckpunkten A', B' und C'
GSwV	Schwerpunktvektor $\underline{\boldsymbol{S'}}$
Prismatoid	
hm	mittlere Höhe des Prismatoids $\boldsymbol{h}_{\mathbf{m}}$
PVol	Volumen des Prismatoids $\boldsymbol{V}$
LOE	Diese Variable („Lösche“) enthält ein Programm, das alle obigen Variablen und sich selbst aus dem Verzeichnis löscht.

Hinweis zur Tabelle 3:

Für die Winkel wird jeweils der Kosinus ausgegeben, dann sind die Ergebnisse unabhängig vom eingestellten Winkelmodus. Außerdem deckt der Kosinus die Winkel von 0° bis 180° ab, ohne dass Extremwerte auftreten. Der Tangens hätte bei 90° einen Extremwert.

5.7.1.2 ERGPR

Das Programm **ERGPR** (Ergebnis der Prismen) zeigt die Ergebniswerte von **PRISM** in einem Auswahlmenü an. Wenn die Variablen nicht vorhanden sind oder Werte fehlen, werden für die fehlenden Werte die Variablennamen angezeigt.

5.7.1.3 PRS

PRS (Prismen-Summen) wird vom DGM-Programm **DGMCALC** als Unterprogramm verwendet. Es erwartet zu Beginn im Stack die drei Ortsvektoren $\underline{\boldsymbol{A}}$, $\underline{\boldsymbol{B}}$ und $\underline{\boldsymbol{C}}$ zu den Eckpunkten eines im Raum liegenden Dreiecks. Es nimmt die drei Vektoren vom Stack und berechnet nach den oben angegebenen Formeln folgende 3 Ergebnisvariablen und stellt sie zur weiteren Verwendung für **DGMCALC** im Stack zur Verfügung:

Tabelle 4: Ergebnisse des Unterprogramms PRS

Stackebene 3	**DFl**
Stackebene 2	**GFl**
Stackebene 1	**PVol**

Das Programm **DGMCALC** nimmt diese drei Werte vom Stack und summiert sie für jeden Horizont getrennt in den Summenvariablen (siehe unten) auf.

5.7.2 Vorbereitung der Gesamtberechnung

Obwohl wegen der großen Datenmengen ein Digitales Geländemodell (= DGM-Projekt) am besten auf einem Computer durchgerechnet werden sollte, ist bei kleineren Projekten die Berechnung durchaus mit einem HP-Taschenrechner zu schaffen. Man muss dabei die Mühe bei der Eingabe der Daten in Kauf nehmen.

Mit dem Programm **DGMCALC** kann ein Digitales Geländemodell komplett nach dem oben gezeigten Prinzip auf dem HP49 durchgerechnet werden. Das Ausgabeprogramm **ERGDGM** zeigt die Ergebnisse in einem Auswahlmenü an.

5.7.2.1 Bezeichnungen von Eingabevariablen

Die Variablenbezeichnungen für die Eingabeobjekte sind beliebig. Sie sollen jedoch „sprechende“ Namen sein, aus denen man den Typ des Inhalts der Variablen ablesen kann (z.B. **P** als Anfangsbuchstabe für Punktbezeichnungen, **D** für Dreikantprismen, **H** für Horizonte). Empfohlen werden Bezeichnungen mit jeweils drei Zeichen.

Hinweis für Variablennamen

Diese Variablennamen werden nur für die Eingabeobjekte eines DGM-Projekts verwendet. In den Programmen haben diese Variablennamen keine Bedeutung, außer für die Ausgabeliste. Das Programm liest diese Namen aus den Eingabedaten und verwendet sie, um an die gespeicherten Inhalte heranzukommen. Der Anwender ist also in der Wahl der Namen weitgehend frei.

Dies hat den Vorteil, dass der Anwender die in den Plänen und bei Geländeaufnahmen verwendeten Punktbezeichnungen beibehalten und in der Berechnung verwenden kann, wenn sie keine reservierten Namen und nach den Namenkonventionen des HP-Taschenrechners zulässig sind.

Es gibt drei Typen von Eingabevariablen: **Punkt, Dreieck und Horizont**

Tabelle 5: Variablen für die Dateneingabe

Variablen	**Bedeutung**	**Inhalt (Beispiel)**
P01 bis ...	**Punktbezeichnung:** Jede Variable dieses Typs enthält einen Ortsvektor zu dem bezeichneten Punkt.	$[x_A, y_A, z_A]$
D01 bis ...	**Dreieck:** Jede Variable dieses Typs enthält eine Liste mit den Namen von drei Punkten, die ein Dreieck bilden. Die Variablen für die in der Liste aufgeführten Punktbezeichnungen müssen existieren und das korrekte Objekt (Vektor) enthalten.	**{P01,P04,P03}**
H01 bis ...	**Horizont:** Jede Variable dieses Typs enthält eine Liste mit den Namen der Dreiecke, die den jeweiligen Horizont (Dreiecksnetz) bilden. Die Variablen für die in der Liste aufgeführten Dreiecke müssen existieren und das korrekte Objekt (Liste mit 3 Punktbezeichnungen) enthalten.	**{D01,D02,D05,D08}**

5.7.3 Eingaben

Für die Berechnung auf dem HP49 wird in einem Arbeitsverzeichnis

die notwendige Anzahl Einzelvariablen mit den Namen der Punktbezeichnungen angelegt und dort die Koordinaten der Punkte in Form eines Ortsvektors zum Punkt gespeichert.

Für die Dreikantprismen werden Variablen verwendet, in denen jeweils drei Punktbezeichnungen für das Dreikantprisma in einer Liste gespeichert sind.

Variablen für Horizonte enthalten die Bezeichnungen der im jeweiligen Dreiecksnetz vorhandenen Dreikantprismen.

Damit sind alle Eingaben vorhanden und alle Horizonte des Projekts eindeutig bestimmt.

5.7.4 Voraussetzungen und Einschränkungen

5.7.4.1 DGM-Projekt

Ein DGM-Projekt kann aus beliebig vielen Dreiecksnetzen (Horizonten) bestehen. Die Umrisslinien der Dreiecksnetze, die zu einem Projekt gehören, müssen im Grundriss identisch sein. Diese gemeinsame Umrisslinie muss die Horizonte als polygonale Randlinie umgrenzen.

5.7.4.2 Mindestens einen, maximal 2 Horizonte berechnen

Vor der Berechnung muss der Variablenname für den (in der Natur) höher gelegenen (oberen) Horizont in Stackebene 2 und der für den tieferen (unteren) in Stackebene 1 eingegeben werden. Horizonte werden als Listen mit Namen der beteiligten Dreiecke gespeichert.

Die Berechnung erfolgt immer für 2 Horizonte des DGM-Projekts, wobei die dadurch umgrenzten Rauminhalte (Schichten) ermittelt werden. Sie kann auch für einen Horizont allein erfolgen. Dann ist die x,y-Ebene automatisch der zweite (untere) Horizont.

5.7.4.3 Existenz und Werte von Variablen

Jedes Dreikantprisma für einen Horizont und jeder Punkt, der als Eckpunkt eines Dreiecks für ein Dreikantprisma angegeben ist, muss auf dem HP49 als Variable existieren und diese muss den richtigen Objekttyp enthalten.

Die Flächeninhalte der Dreiecke werden immer positiv gerechnet.

Bei den Dreiecksnetzen werden keine „überhängenden“ Flächen zugelassen, auch wenn der Umlaufsinn der Eckpunkte einiger Dreiecke negativ ist.

5.7.4.4 Negativen Umlaufsinn der Eckpunkte vermeiden

Bei negativem Umlaufsinn werden Normalenvektor und Fall-Linien-Einheitsvektor die falsche Richtung aufweisen. Alle anderen Werte werden richtig berechnet.

Die Programme führen keine Plausibilitätsprüfungen durch. Der Anwender muss selbst dafür sorgen, dass die Eingaben korrekt sind.

Die Dreiecksnetze zeichnet man am besten als maßstäbliche Skizze, für Punktkoordinaten und Prismen legt man Tabellen an und überprüft vor der Eingabe in den HP49 alle Werte anhand der Geländeaufnahme auf Plausibilität und Korrektheit.

Dabei müssen die Dreiecksnetze richtig gebildet werden. Eckpunkte eines Dreiecks dürfen nicht im Innern eines anderen Dreiecks liegen (keine Überlappung, keine Überdeckung). Die Seiten des einen Dreiecks dürfen sich nicht mit den Seiten eines anderen Dreiecks desselben Dreiecksnetzes schneiden.

5.7.4.5 Plausibilitätskontrollen

Für die PC-Version des DGM-Systems hat der Verfasser jedoch ein eigenes Programm DGMPLS für eine Plausibilitätsprüfung entwickelt, das folgende Plausibilitäten prüft:

- Prüfung der Punktbezeichnungen auf Einmaligkeit,
- Prüfung der Punktkoordinatentripel auf Einmaligkeit,
- Prüfung der Dreiecksmaschen auf Einmaligkeit,
- Prüfung auf richtigen Umlaufsinn der Seitenvektoren,
- Prüfung der Schräglage der Dreiecke (steiler als 1:1),
- Prüfung auf Überlappung und Überdeckung der Dreiecke.

Für die Taschenrechnerversion steht dieses Programm nicht zur Verfügung.

5.7.5 DGMCALC

Die Eingabe der Horizonte erfolgt im Stack. Dort muss der Objektname in Apostrophen vorhanden sein, z.B. **'H01'** und **'H02'**. Wenn nur 1 Horizont eingegeben wurde, fragt das Programm, ob dies OK ist oder ob abgebrochen werden soll.

Dann folgt die Listenverarbeitung für jeden Horizont getrennt unter Aufruf von **PRS** für jedes Prisma und die Aufsummierung der Werte für jeden Horizont. Am Schluss wird (bei zwei Horizonten) die Differenz der Prismensummen der beiden Horizonte als Kubatur berechnet.

Die Ergebnisse werden in folgenden Variablen gespeichert:

Tabelle 6: Ausgabe der Summen aus dem Unterprogramm DGMCALC

Variable	Bedeutung
SuDo	Summe aller Deckflächen oberer Horizont
SuGo	Summe aller Grundflächen oberer Horizont
SuPo	Summe aller Prismenvolumina oberer Horizont
SuDu	Summe aller Deckflächen unterer Horizont
SuGu	Summe aller Grundflächen unterer Horizont
SuPu	Summe aller Prismenvolumina unterer Horizont
Kubatur	Kubatur als Differenz **SuPo - SuPu**
LOESU	Diese Variable („lösche Summen“) enthält ein Programm, das alle obigen Variablen und sich selbst aus dem aktuellen Verzeichnis löscht.

Falls die Bedingung **SuGo = SuGu** nicht erfüllt ist, wird eine Fehlermeldung ausgegeben.

5.7.6 ERGDGM

Das Programm **ERGDGM** zeigt die Ergebniswerte von **DGMCALC** in einem Auswahlmenü an. Wenn die Variablen nicht vorhanden sind oder Werte fehlen, werden für die fehlenden Werte die Variablennamen angezeigt.

6 DGM-Beispiel

Dieses aus der Praxis gegriffene Beispiel ist sehr ausführlich und soll die Anwendung der oben beschriebenen Theorie in der Praxis zeigen. Es wird mit dem HP-Programm **DGMCALC** und zum Vergleich auch mit einem Computerprogramm durchgerechnet.

6.1 Projekt

6.1.1 Beschreibung der Aufgabe

Ein Kieshaufen in einem leicht geneigten Gelände soll bis auf das ursprüngliche Gelände abgetragen und anschließend der Aushub für einen vertieften Ladeplatz durchgeführt werden. Dort soll Material zwischengelagert werden. Das Material soll später von oben und von der Seite in den fertigen Ladeplatz hineingeschoben werden können. Eine Stützwand schließt hangseitig die für Transportfahrzeuge und Ladegeräte planierte Fläche ab. Bild 8 und Bild 9 zeigen die Situation im Lageplan und im Schnitt.

Zu berechnen sind die zu bewegenden Kies- und Aushubmengen und die Abwicklungen (= wirkliche Flächengröße der Oberflächen) der Horizonte.

6.1.1.1 Vorbereitungsarbeiten

Es wird ein örtliches Koordinatensystem verwendet, dessen Koordinatenursprung aus Bild 8 und Bild 9 hervorgehen.

Zur Berechnung der zu bewegenden Erdmassen muss die Oberfläche des Kieshaufens und die geplante Platzoberfläche bekannt sein.

Eine Geländeaufnahme liefert die Gestalt des Kieshaufens. Dabei werden markante Oberflächenpunkte in Lage und Höhe genau vermessen. Die Werte jedes Punktes werden dem Horizont **H01** zugeordnet und mit einer Punktbezeichnung zusammen in eine Tabelle eingetragen. Die passenden Punkte daraus werden zu einem Dreiecksnetz verbunden und in einen Lageplan eingezeichnet.

Das Dreiecksnetz für den Fertigzustand (Horizont **H02**) geht aus dem Ausführungslageplan hervor.

Bei Vorliegen beider Horizonte können die echten Oberflächen (Abwicklung), die Grundflächen, die Neigungen der beteiligten Dreiecke und das Volumen (Kubatur) zwischen den beiden Horizonten berechnet werden.

Wenn man die Kubatur von Kieshaufen und Aushub getrennt abrechnen will, muss man nach Abtragen des Kieshaufens und vor dem Aushub des Ladeplatzes die ursprüngliche Geländeoberfläche vermessen oder anhand der Umrisslinie schätzen. Dies ergibt dann Horizont **H03**.

6.1.1.2 Vorteil des Ladeplatzes

Für die Berechnung der Menge des gelagerten Materials genügt es, bei Bedarf die Oberfläche der gelagerten Menge als neuer Horizont **H04** zu vermessen. Dann kann zusammen mit dem bekannten Horizont **H02** des Ladeplatzes die Berechnung der Kubatur sofort erfolgen.

Bei nicht mit Material überdeckten Teilen des Horizonts **H02** wird Horizont **H04** mit <u>neuen</u> Dreiecken bis zur gemeinsamen Umrisslinie ergänzt, auch wenn dort die Schichtdicke zwischen den beiden Horizonten Null ist.

6.1.1.3 Besonderheiten

Die Umrisslinien (Randlinien) zweier Berechnungshorizonte müssen im Grundriss identisch sein, damit später bei der Berechnung der Kubatur einer Schicht zwischen zwei Horizonten keine „senkrechten Restwände bis zur Bezugsebene“ stehen bleiben, die nicht zur Schicht gehören. Die Randpunkte der Horizonte jedoch müssen nicht identisch sein, sie müssen zwar dieselben Lagekoordinaten haben, können aber verschieden hoch sein. Damit ergeben sich senkrechte „Wände“, die nicht als Dreiecksflächen definiert werden müssen. Auch innerhalb der Horizonte können senkrechte Wände eingefügt werden, wenn diese durch Primenseitenflächen gebildet werden.

Hinweis:
Im Beispiel ist die Randlinie ein Rechteck (aus Platzgründen und wegen der besseren Darstellbarkeit), sie kann aber jede beliebige polygonale Form haben. Innerhalb dieser Umrisslinie befindet sich eine Stützwand. Aus den Zuordnungen der Punkte **P11**, **P12** und **P13** zu den Dreiecken ergibt sich, dass **P12** zur Oberkante der Stützwand gehört. **P11** und **P13** gehören dagegen nicht zur Stützwand, sondern zur unteren planierten Fläche.

6.1.2 Projektdaten

Bild 8 zeigt den Lageplan für das Projekt „Ladeplatz“ mit den drei Dreiecksnetzen **H01** (blau), **H02** (rot) und **H03** (grün). Ein Schnitt (Bild 9) verdeutlicht die Höhenlage der Horizonte.

Hinweise:
Als Basiseinheit gilt die Einheit „Meter“. Es können auch andere Längeneinheiten verwendet werden, dann ergeben sich die Flächen als zweite und die Volumina als dritte Potenzen dieser Einheit.

Um die Datenmenge für die Eingabe klein zu halten und die Zeichnungen hier in diesem PDF-Dokument vollständig wiedergeben zu können, wurden für das Beispiel nur 13 Punkte gewählt. In der Praxis werden die Punkte bei Geländeaufnahmen wesentlich enger gelegt, damit das Modell besser an die Wirklichkeit herankommt.

Da die Bilder hier nicht maßstäblich dargestellt werden können, ist ein Koordinaten-Gitter mit Linienabstand 1 m in **hellgrauer** Farbe in die Zeichnungen eingebunden worden.

Bild 8: Projekt Ladeplatz, Grundriss

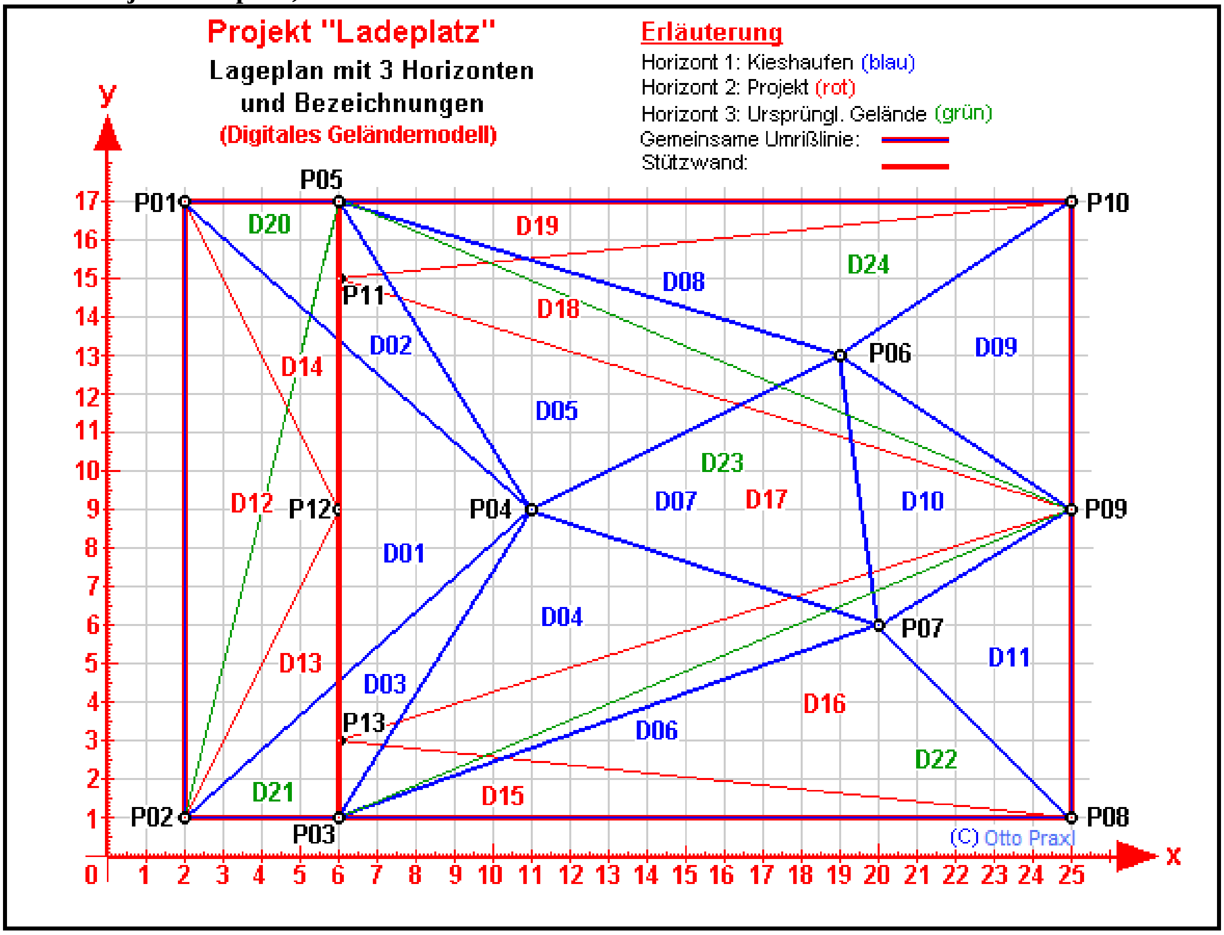
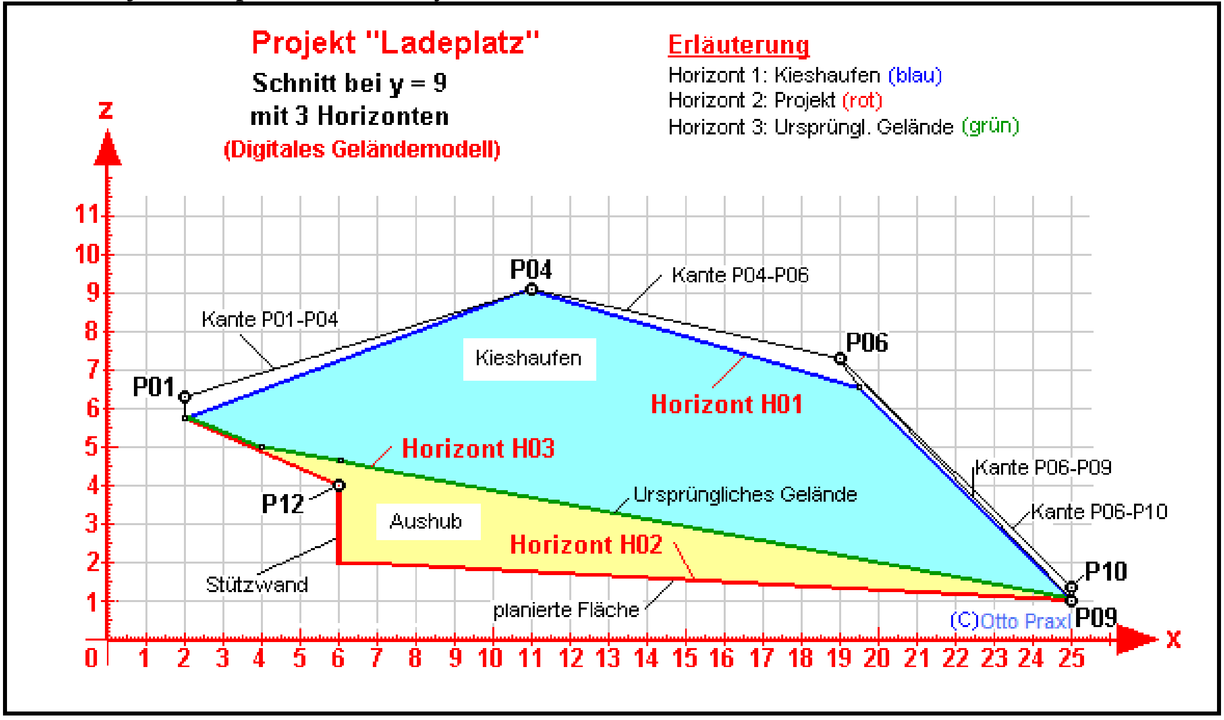


Bild 9: Projekt Ladeplatz, Schnitt bei y = 9



6.1.3 Tabellen der Eingabewerte

Aus Lageplan und Schnitt sind die Daten für die Eingabe zu entnehmen. Für reelle Zahlen wird beim Taschenrechner das Dezimalkomma und beim PC der Dezimalpunkt gewählt, weil dieser auf dem PC im FORTRAN-Programm üblich ist.

Die Tabellen müssen für die Punkte, Dreiecke und Horizonte sehr sorgfältig erstellt und hinterher auf Richtigkeit überprüft werden, ob die Reihenfolge ***x,y,z*** der Komponenten im Vektor, der Umlaufsinn der Dreiecke stimmt und ob die Dreiecksnetze vollständig sind.

Dann werden die 40 Variablen (13 Punkte, 24 Dreiecke und 3 Horizonte) in einem Verzeichnis (z.B. DGMDIR) auf dem HP-Taschenrechner angelegt und die entsprechenden Werte aus den nachfolgenden Tabellen dort gespeichert.

Achtung:
Der Quelltext **DGMDIR.txt** enthält auch die 40 Variablen mit den Werten. Dadurch kann sich der Anwender mühsame Eingabe dieser Werte ersparen (siehe oben).

Tabelle 7: Punktkoordinaten

Punkte	
Variable	**Inhalt** Vektor = [***x y z***]
P01	[2,00 17,00 6,30]
P02	[2,00 1,00 5,20]
P03	[6,00 1,00 4,50]
P04	[11,00 9,00 9,10]
P05	[6,00 17,00 4,90]
P06	[19,00 13,00 7,30]
P07	[20,00 6,00 6,00]
P08	[25,00 1,00 1,20]
P09	[25,00 9,00 1,00]
P10	[25,00 17,00 1,20]
P11	[6,00 15,00 2,00]

Punkte	
Variable	Inhalt Vektor = [***x y z***]
P12	[6,00 9,00 4,00]
P13	[6,00 3,00 2,00]

Tabelle 8: Dreiecke mit Eckpunkt-Bezeichnungen

Dreiecke			
Variable	**Inhalt** Liste mit 3 Punktbez.	**Variable**	**Inhalt** Liste mit 3 Punktbez.
D01	{P01 P02 P04}	**D13**	{P02 P03 P12}
D02	{P01 P04 P05}	**D14**	{P01 P12 P05}
D03	{P02 P03 P04}	**D15**	{P13 P03 P08}
D04	{P04 P03 P07}	**D16**	{P13 P08 P09}
D05	{P04 P06 P05}	**D17**	{P11 P13 P09}
D06	{P03 P08 P07}	**D18**	{P11 P09 P10}
D07	{P04 P07 P06}	**D19**	{P05 P11 P10}
D08	{P05 P06 P10}	**D20**	{P01 P02 P05}
D09	{P09 P10 P06}	**D21**	{P02 P03 P05}
D10	{P06 P07 P09}	**D22**	{P03 P08 P09}
D11	{P07 P08 P09}	**D23**	{P05 P03 P09}
D12	{P01 P02 P12}	**D24**	{P05 P09 P10}

Tabelle 9: Horizonte mit den zugehörigen Dreieck-Bezeichnungen

Horizonte	
Variable	**Inhalt** Dreiecksnetz = Liste mit Dreiecksbezeichnungen
H01	**{D01 D02 D03 D04 D05 D06 D07 D08 D09 D10 D11}**
H02	**{D12 D13 D14 D15 D16 D17 D18 D19}**
H03	**{D20 D21 D22 D23 D24 }**

6.2 Berechnung mit dem HP-Taschenrechner

Wenn die Werte für die Punkte, Dreiecke und Horizonte aus den drei obigen Tabellen in den Variablen gespeichert sind, kann die Berechnung der Horizonte **H01, H02** und **H03** des Beispiels mit **DGMCALC** durchgeführt werden.

6.2.1 Hinweise

Für die in den Stack einzugebenden Horizonte darf nur der Objektname in Apostrophen, z.B. **'H01'**, erscheinen, nicht das Objekt selbst. Das Programm prüft nicht den Variablentyp der Eingabewerte auf Richtigkeit. Steht der falsche Typ im Stack, kommt es zum Abbruch des Programms und zu einer Fehlermeldung.

Der obere Horizont muss auch in der Natur höher liegen als der untere Horizont. Wenn die beiden im Stack vertauscht werden, ergibt sich bei der Berechnung eine negative Kubatur.

Hier in diesem Beispiel liegt Horizont **'H01'** (Kieshaufen) ganz oben, dann kommt **'H03'** (Geländehöhe) und der unterste Horizont ist **'H02'** (Sohle des Ladeplatzes).

Folgende Schichten können berechnet werden
(die berechneten Kubaturen werden hier schon vorweg angegeben):

Tabelle 10: Schichten mit begrenzenden Horizonten

Schicht	oberer Horizont	unterer Horizont	Kubaturen
Kieshaufen allein	H01	H03	**878,3500 m³**
Aushub allein	H03	H02	**384,8667 m³**
Gesamtvolumen	H01	H02	**1263,2167 m³**

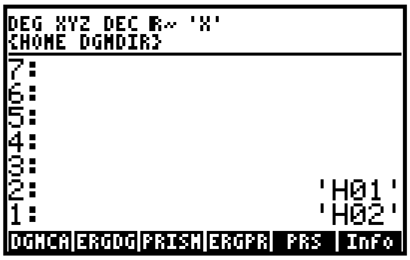
Wichtig für die Eingabewerte von **DGMCALC**:

Da das Programm **DGMCALC** nur die Anzahl der im Stack vorhandenen Horizonte überprüft (0, 1 oder 2), darf bei Berechnung von nur <u>einem</u> Horizont kein weiteres Objekt in Stackebene 2 vorhanden sein, sonst wird dieses als zweiter oberer Horizont genommen.

Plausibilitätskontrollen hätten den Umfang des Taschenrechner-Programmes unnötig aufgebläht. Bei dem hohen Anspruch, den DGM an den Anwender stellt, ist es durchaus zumutbar, dass dieser selber alle Eingaben kontrolliert, bevor er auf den Knopf drückt.

6.2.2 Programmaufruf DGMCALC und ERGDGM

Bild 10: Horizonte im Stack



Hier soll die Berechnung des Gesamtvolumens gezeigt werden.

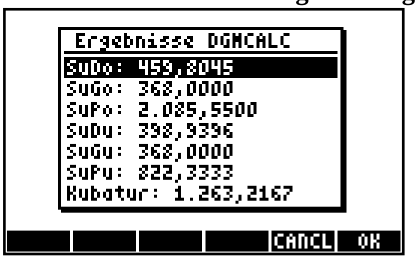
Die Variablenbezeichnungen (Objektnamen mit Begrenzungszeichen ' ') für die Horizonte werden eingegeben, zuerst für den oberen und dann für den unteren Horizont: '**H01**' **ENTER** und dann **'H02'** **ENTER**. Dann stehen diese Bezeichnungen im Stack übereinander, wie Bild 10 es zeigt:

Nun wird **DGMCALC** aufgerufen. (im Menü ist nur „DGMCA“ davon sichtbar).

Die Berechnung der Ergebnisse dauert beim HP-Taschenrechner nur wenige Sekunden.

Danach stehen die Ergebnisvariablen im aktuellen Verzeichnis zur Verfügung, die direkt oder über das Programm **ERGDGM** ausgewählt und angezeigt werden können. Die Anzahl der Kommastellen kann vorher (hier z. B.: 4 FIX) eingestellt werden.

Bild 11: ERGDGM-Anzeige der Ergebnisse



Diese vom HP-Taschenrechner berechneten Ergebnisse der Projekts „Ladeplatz“ sind identisch mit den weiter unten gezeigten Ergebnissen der Computerberechnung.

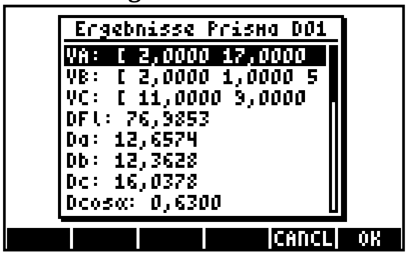
6.2.3 Programmaufruf PRISM und ERGPR

Nun als Beispiel noch die Berechnung des Prismatoids **D01.**

Bild 12: Prismenname im Stack

Dazu wird der Name '**D01**' in den Stack gestellt, wie Bild 12es zeigt. Aus der Bezeichnungen dieser Variablen holt sich das Programm den Namen, den es als Überschrift der Ergebnisliste zeigt. Dann wird die Variable D01 automatisch entpackt, indem es die drei Vektoren der Punkte **P01**, **P02** und **P04** extrahiert, die es intern als <u>***VA***</u> (Vektor zum Dreieckpunkt A), <u>***VB***</u> (Vektor zum Dreieckpunkt B), und <u>***VC***</u> (Vektor zum Dreieckpunkt C) bezeichnet, wie es Bild 2 bzw. Bild 3 entspricht.

Bild 13: Ergebnisse aus PRISM



Aus diesen drei Vektoren berechnet das Programm **PRISM** die Seitenlängen Da, Db und Dc der Deckfläche, die Seitenlängen Ga, Gb und Gc der Grundfläche, die darauf bezogenen Kosinuswerte der Winkel dieser beiden Dreiecke und die übrigen Werte für das Prisma.

Nach Abschluss der Berechnung stehen die Ergebniswerte in den Variablen, die mit **ERGPR** im CHOOSE-Menü angezeigt (Bild 13 bis Bild 16) und in den Stack geholt werden können.

Bild 14: Ergebnisse aus PRISM

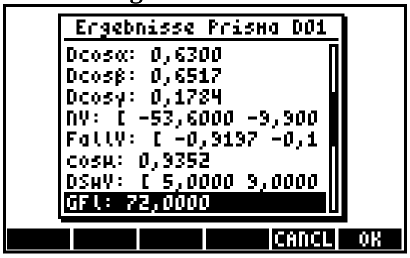


Bild 15: Ergebnisse aus PRISM

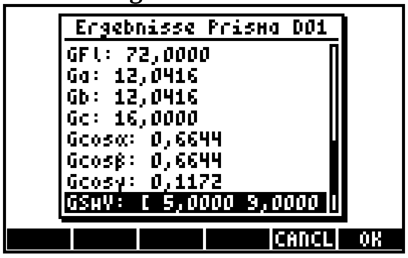
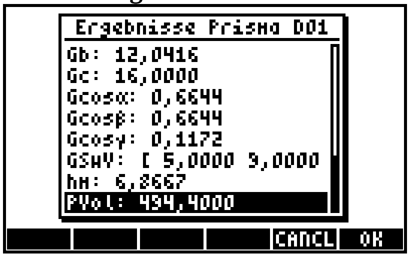


Bild 16: Ergebnisse aus PRISM



6.3 Graphische Darstellung auf dem Taschenrechner?

Aufgrund der Graphikfunktionen wären die HP-Taschenrechner in der Lage, die oben beschriebenen Dreiecksnetze anhand der vorhandenen Daten (Punkte, Dreiecke und Horizonte) räumlich (z.B. isometrisch) darzustellen. Da für die Vorbereitung einer DGM-Berechnung ohnehin ein Lageplan angefertigt werden muss, hat der Verfasser hier auf ein Programm für die graphische Darstellung der Dreiecksnetze auf dem HP-Taschenrechner verzichtet, weil es schließlich nur eine Spielerei wäre.

6.4 Vergleichsberechnung mit dem Computer

Der Verfasser hat das Projekt „Ladeplatz“ auch mit seinem eigenen DGM-System auf dem Computer (PC) durchgerechnet und das Ergebnis nachfolgend wiedergegeben. Man vergleiche die Ergebnisse des Taschenrechners aus **DGMCALC** mit dem Computerergebnis.

6.4.1 Computerergebnisse

```
=========================================================================
                    DGM: Digitales Gelände-Modell
-------------------------------------------------------------------------
Programm: DGM (V4.0L)                       Bearbeitungsdatum: 03.11.2001
       Berechnung  von Mengen, Grund- und Oberflächen aus Prismen
       aus einem Digitalen Geländemodell (DGM) nach REB-VB 22.013
-------------------------------------------------------------------------
Arbeitstitel: Ladeplatz
Neigung der Dreiecksoberflächen gegen die Horizontalebene: tan µ
Berechnungshorizont oben :       1
Berechnungshorizont unten:       2
=========================================================================
Berechnungsergebnisse für Horizont-Nr. 1:
            Waagrechte Bezugsebene: Kote      =          0.000
-------------------------------------------------------------------------
-----Eckpunkte------   Grundfl. Mittl.Höhe    Oberfl. Pr.Volumen   tan µ
-------------------------------------------------------------------------
P01    P02    P04    D01   72.000       6.867     76.985    494.400    .379
P01    P04    P05    D02   16.000       6.767     20.712    108.267    .822
P02    P03    P04    D03   16.000       6.267     19.589    100.267    .706
P04    P03    P07    D04   43.500       6.533     52.268    284.200    .666
P04    P06    P05    D05   42.000       7.100     47.108    298.200    .508
P03    P08    P07    D06   47.500       3.900     60.986    185.250    .805
P04    P07    P06    D07   30.000       7.467     31.586    224.000    .329
P05    P06    P10    D08   38.000       4.467     60.776    169.733   1.248
```

```
P09     P10     P06    D09   24.000        3.167      34.517      76.000    1.034
P06     P07     P09    D10   19.000        4.767      27.200      90.567    1.024
P07     P08     P09    D11   20.000        2.733      28.077      54.667     .985
-----------------------------------------------------------------------------------
Summen      :               368.000                  459.804    2085.550
Schwerpunkt:  RW =          13.500
              HW =           9.000
===================================================================================
Berechnungsergebnisse für Horizont-Nr. 2:
         Waagrechte Bezugsebene: Kote      =           0.000
-----------------------------------------------------------------------------------
-----Eckpunkte------    Grundfl. Mittl.Höhe    Oberfl. Pr.Volumen    tan µ
-----------------------------------------------------------------------------------
P01     P02     P12    D12   32.000        5.167      34.998     165.333     .443
P02     P03     P12    D13   16.000        4.567      16.274      73.067     .186
P01     P12     P05    D14   16.000        5.067      17.047      81.067     .368
P13     P03     P08    D15   19.000        2.567      30.593      48.767    1.262
P13     P08     P09    D16   76.000        1.400      76.100     106.400     .051
P11     P13     P09    D17  114.000        1.667     114.158     190.000     .053
P11     P09     P10    D18   76.000        1.400      76.100     106.400     .051
P05     P11     P10    D19   19.000        2.700      33.670      51.300    1.463
-----------------------------------------------------------------------------------
Summen      :               368.000                  398.940     822.333
Schwerpunkt:  RW =          13.500
              HW =           9.000
===================================================================================
Kubatur      =      Differenz der Prismenvolumina (D1-D2)    =     1263.217
===================================================================================
```

```
Koordinaten und Koten der vorhandenen Punkte:
------------------------------------------------
Punktbez.   Rechtswert     Hochwert        Kote
------------------------------------------------
P01              2.000       17.000       6.300
P02              2.000        1.000       5.200
P03              6.000        1.000       4.500
P04             11.000        9.000       9.100
P05              6.000       17.000       4.900
P06             19.000       13.000       7.300
P07             20.000        6.000       6.000
P08             25.000        1.000       1.200
P09             25.000        9.000       1.000
P10             25.000       17.000       1.200
P11              6.000       15.000       2.000
P12              6.000        9.000       4.000
P13              6.000        3.000       2.000
------------------------------------------------
```

6.4.2 Erläuterung der Computerergebnisse

Wiedergegeben ist hier der Computerausdruck für die Berechnung des Gesamtvolumens (Kubatur zwischen **H01** und **H02**.

Der Computer gibt Dezimalzahlen mit einem Dezimalpunkt aus. Beim Taschenrechner haben wir das Komma einstellt.

Die Dreiecke sind im Computerausdruck nicht gekennzeichnet, weil sie durch die drei Punkte eindeutig bestimmt sind. Die Bezeichnungen der Dreiecke wurden zum besseren Vergleich mit den HP-Ergebnissen **in roter Farbe** hier manuell nachgetragen.

Die Koordinaten $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$ der Punkte werden im Computerausdruck und in der Bildschirmgraphik mit Rechtswert (RW), Hochwert (HW) und die Höhe als Kote (Höhenkote) bezeichnet (wie bei Vermessungsingenieuren üblich).

Achtung: Unterschiedliche Ausgabe für die Flächenneigung $\boldsymbol{\mu}$:

Ergebnisse HP-Taschenrechner: **cos** $\boldsymbol{\mu}$
Ergebnisse Computer: **tan** $\boldsymbol{\mu}$.

μ ist der Neigungswinkel der Dreiecke, der im Computerausdruck als tan μ angegeben wurde. (**100 · tan** $\boldsymbol{\mu}$ ist nämlich das Maß in % für die Steigung bzw. für das Gefälle, das in der Praxis mehr aussagt als der Winkelwert). Die größte Neigung hat das Dreieck **D19** mit tan $\mu = 1{,}463$. Das ist eine Böschung mit 55,64°.

Das Dreiecknetz wird in der Computergrafik mittig positioniert. Die Skalen des Koordinatensystems werden passend verschoben eingeblendet. Die Punktbezeichnungen und die Dreiecksnummern werden automatisch positioniert.

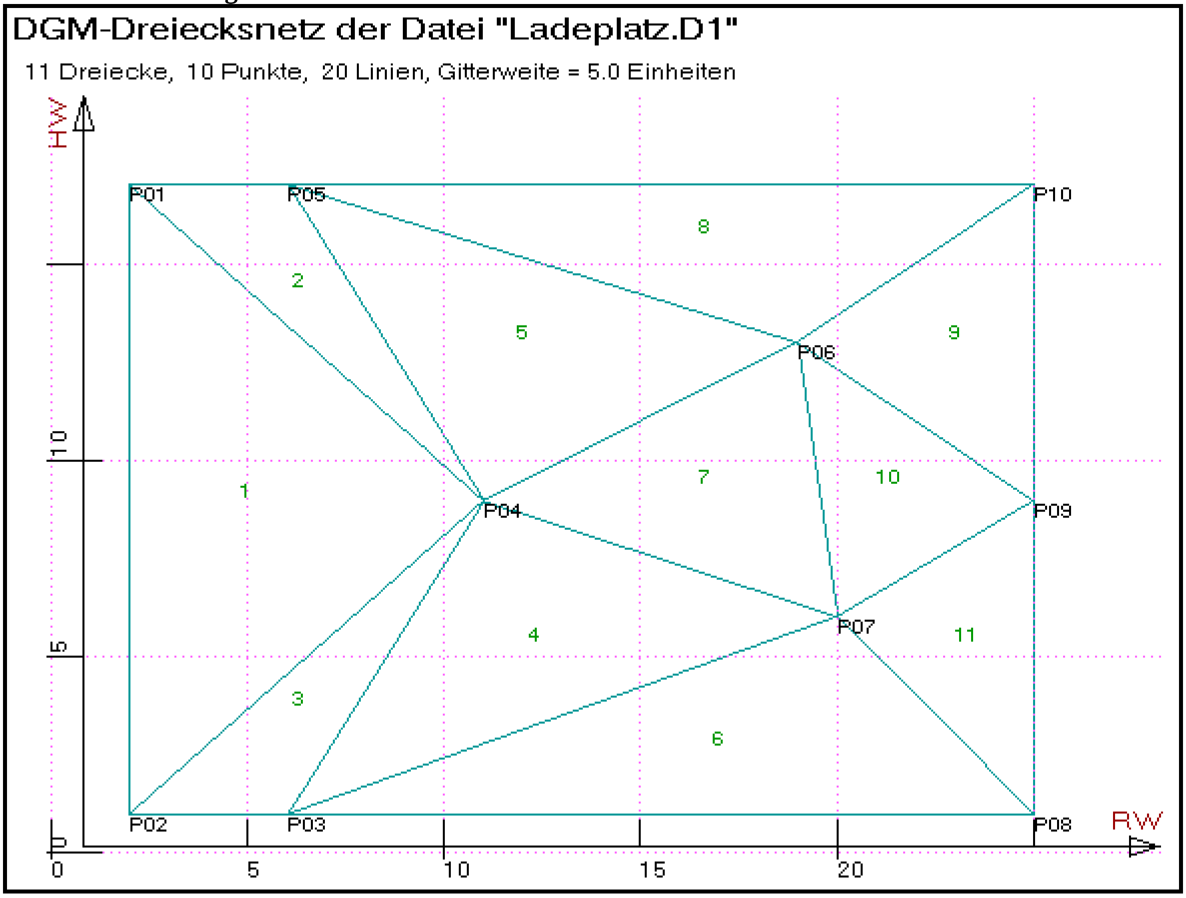
Das Computerprogramm prüft während der Eingabe die Daten auf Plausibilität (z. B. Umlaufsinn, Überlappungen, Überdeckungen, Existenz der verwendeten Bezeichnungen, übermäßig große Neigungen der Dreiecke). Außerdem berechnet das Programm noch die Schwerpunktlage der Grundfläche der beiden an der Berechnung beteiligten Dreiecksnetze, diese müssen den gleichen Schwerpunkt haben. Unplausibilitäten meldet das Programm als Fehler.

Diese Plausibilitätsprüfungen sind beim Programm **DGMCALC** auf dem HP-Taschenrechner nicht eingebaut. Deshalb müssen die Eingabedaten vor der Berechnung durch den Anwender sorgfältig überprüft werden.

6.4.3 *Bildschirmgraphik auf dem PC*

Der Horizont **H01** wird als **Bildschirmgraphik** auf dem PC angezeigt.

Bild 17: Bildschirmgrafik auf dem PC



7 Gitternetze im Raum

In manchen Geländemodellen wird mit quadratischen oder rechteckigen Gitternetzen gearbeitet. Dort werden die Lagekoordinaten durch das Gitternetz festgelegt und nur die Höhen der Gitterpunkte im Gelände gemessen.

Die Berechnung von Geländemodellen in rechteckigen Gitternetzen wurde hier nicht behandelt, weil sie für den Taschenrechnereinsatz nicht geeignet sind.

8 Schlusswort

In diesem Beitrag wurde das Prinzip und die Anwendung der digitalen geometrischen Modelle gezeigt, die auf räumliche Dreiecksnetze aufbauen. Diese Netze werden als Grundlage für die gängigen graphischen Systeme verwendet werden. Das gezeigte *Digitale Geländemodell* ist interessant für Studenten und Ingenieure des Bauwesens und der Vermessungstechnik.

Es ist erstaunlich, dass ein Digitales Geländemodell mit einigen wenigen Programmbefehlen auch auf einem wissenschaftlichen Taschenrechner zum Laufen zu bringen ist und damit sogar größere Projekte mit verhältnismäßig geringem Aufwand berechnet werden können.

9 Anhang

9.1 Quellprogramm DGMDIR

```
%%HP: T(3)A(D)F(,);
@ Taschenrechnerprogramm für den HP 49G, HP 49g+ und HP 50G
@ zur Berechnung eines digitalen Geländemodells (DGM).
@ Autor: Otto Praxl
@ www.praxelius.de
@ Stand vom 22.06.2011
@ Dieser Quelltext wird auch als Textdatei DGMDIR.txt auf der
@ genannten Internetseite angeboten.

DIR
  DGMCALC
  \<<
    CASE DEPTH 1, <
      THEN 0, 'Horizonte' STO 1000, ,05 BEEP 2000, ,1 BEEP
"Stack ist leer!" MSGBOX
      END DEPTH 1, ==
      THEN 1, 'Horizonte' 2000, ,1 BEEP 1000, ,05 BEEP 2000, ,1 BEEP
"Nur 1 Horizont
   vorhanden!
OK dr\252cken
oder mit CANCEL
abbrechen!" MSGBOX STO
      END DEPTH 1, >
      THEN 2, 'Horizonte' STO
      END
    END
    IF Horizonte 1, \>=
    THEN 0, { SuPu SuGu SuDu SuPo SuGo SuDo Kubatur } STO
      \<< { SuDo SuDu SuGo SuGo SuGu SuPo SuPu Kubatur LOESU } PURGE
      \>> 'LOESU' STO
    END
    IF Horizonte 2, ==
    THEN SWAP EVAL
      \<< 1,
        \<< EVAL EVAL PRS 'SuPo' STO+ 'SuGo' STO+ 'SuDo' STO+
        \>> DOSUBS
      \>> EVAL EVAL
      \<< 1,
        \<< EVAL EVAL PRS 'SuPu' STO+ 'SuGu' STO+ 'SuDu' STO+
        \>> DOSUBS
      \>> EVAL SuPo SuPu - 'Kubatur' STO SuGo SuGu
      IF \=/
      THEN 2000, ,1 BEEP 1000, ,05 BEEP 2000, ,1 BEEP
"Grundfl\228chen
  verschieden!" MSGBOX
      END
    END
    IF Horizonte 1, ==
    THEN EVAL
      \<< 1,
        \<< EVAL EVAL PRS 'SuPo' STO+ 'SuGo' STO+ 'SuDo' STO+
        \>> DOSUBS
      \>> EVAL 2000, ,1 BEEP 1000, ,05 BEEP 2000, ,1 BEEP
"Es wurde nur
  1 Horizont
   berechnet!
Siehe
SuDo SuGo SuPo" MSGBOX
    END 'Horizonte' PURGE
  \>>
  ERGDGM
  \<< RCLF 'Flagsave' STO { -20, -20, -21, -31, -95, } CF { -2, -3, -22,
-90, -103, -105, } SF DEG RECT DEC
    \<< { SuDo SuGo SuPo SuDu SuGu SuPu Kubatur } DUP VTYPE SORT HEAD
```

```
      IF -1, ==
      THEN CLLCD 1000, ,1 BEEP
"Variablen
        fehlen!" MSGBOX "     Werte fehlen!"
      ELSE " Ergebnisse DGMCALC"
      END
    \>> EVAL CLLCD SWAP DUP
    \<< EVAL
    \>> DOLIST SWAP
    \<< \->TAG
    \>> DOLIST 1, CHOOSE DROP Flagsave STOF 'Flagsave' PURGE
  \>>
  PRISM
  \<< DUP "" + 'DrNr' STO EVAL EVAL \-> A B C
    \<< A 'VA' STO B 'VB' STO C 'VC' STO C B - A C - B A - \-> a b c
      \<< a b CROSS DUP 'NV' STO ABS 2, / 'DFl' STO a ABS 'Da' STO b ABS 'Db' STO c
ABS 'Dc' STO b c DOT Db / Dc / NEG 'Dcos\Ga' STO c a DOT Dc / Da / NEG

'Dcos\Gb' STO a b DOT Da / Db / NEG 'Dcos\Gg' STO A B + C + 3, / 'DSwV' STO NV V\->
SWAP DROP SWAP DROP NV ABS / 'cos\Gm' STO NV V\-> ROT SQ ROT SQ + SWAP /

NEG NV V\-> DROP ROT \->V3 DUP ABS / 'FallV' STO
      \>> A V\-> DROP \->V2 B V\-> DROP \->V2 C V\-> DROP \->V2
    \>> \-> A B C
    \<< C B - A C - B A - \-> a b c
      \<< a b CROSS ABS 2, / 'GFl' STO a ABS 'Ga' STO b ABS 'Gb' STO c ABS 'Gc' STO
b c DOT Gb / Gc / NEG 'Gcos\Ga' STO c a DOT Gc / Ga / NEG 'Gcos\Gb' STO a

b DOT Ga / Gb / NEG 'Gcos\Gg' STO A B + C + 3, / V\-> 0, \->V3 'GSwV' STO
      \>>
    \>> DSwV V\-> SWAP DROP SWAP DROP 'hm' STO GFl hm * 'PVol' STO
    \<< { PVol hm GSwV Gcos\Gg Gcos\Gb Gcos\Ga Gc Gb Ga GFl FallV cos\Gm DSwV
Dcos\Gg Dcos\Gb Dcos\Ga Dc Db Da DFl NV VA VB VC DrNr LOE } PURGE
    \>> 'LOE' STO { LOE DrNr VA VB VC DFl Da Db Dc Dcos\Ga Dcos\Gb Dcos\Gg NV FallV
cos\Gm DSwV GFl Ga Gb Gc Gcos\Ga Gcos\Gb Gcos\Gg GSwV hm PVol } ORDER
  \>>
  ERGPR
  \<< RCLF 'Flagsave' STO { -20, -20, -21, -31, -95, } CF { -2, -3, -22,
-90, -103, -105, } SF DEG RECT DEC
    \<< { VA VB VC DFl Da Db Dc Dcos\Ga Dcos\Gb Dcos\Gg NV FallV cos\Gm DSwV GFl Ga
Gb Gc Gcos\Ga Gcos\Gb Gcos\Gg GSwV hm PVol } DUP VTYPE SORT HEAD
      IF -1, ==
      THEN CLLCD 1000, ,1 BEEP "Variablen
        fehlen!" MSGBOX "     Werte fehlen!"
      ELSE " Ergebnisse Prisma " DrNr \->STR +
      END
    \>> EVAL CLLCD SWAP DUP
    \<< EVAL
    \>> DOLIST SWAP
    \<< \->TAG
    \>> DOLIST 1, CHOOSE DROP Flagsave STOF 'Flagsave' PURGE
  \>>
  PRS
  \<< \-> A B C
    \<< C B - A C - \-> a b
      \<< a b CROSS ABS 2, / A B + C + 3, / V\-> 'hm' STO DROP DROP
      \>> A V\-> DROP \->V2 B V\-> DROP \->V2 C V\-> DROP \->V2
    \>> \-> A B C
    \<< C B - A C - \-> a b
      \<< a b CROSS ABS 2, / DUP
      \>>
    \>> hm * 'hm' PURGE
  \>>
  Info
  \<< CLLCD "DGM:
 Digitales
   Gel\228nde-Modell
   nach REB 22.013
Stand vom 22.06.2011
 Autor: Otto Praxl
```

```
 www.praxelius.de" 2, DISP 0, WAIT DROP
  \>>
@ DGM-Beispiel für Ladeplatz
@ Horizonte
  H01 { D01 D02 D03 D04 D05 D06 D07 D08 D09 D10 D11 }
  H02 { D12 D13 D14 D15 D16 D17 D18 D19 }
  H03 { D20 D21 D22 D23 D24 }
@Dreiecke
  D01 { P01 P02 P04 }
  D02 { P01 P04 P05 }
  D03 { P02 P03 P04 }
  D04 { P04 P03 P07 }
  D05 { P04 P06 P05 }
  D06 { P03 P08 P07 }
  D07 { P04 P07 P06 }
  D08 { P05 P06 P10 }
  D09 { P09 P10 P06 }
  D10 { P06 P07 P09 }
  D11 { P07 P08 P09 }
  D12 { P01 P02 P12 }
  D13 { P02 P03 P12 }
  D14 { P01 P12 P05 }
  D15 { P13 P03 P08 }
  D16 { P13 P08 P09 }
  D17 { P11 P13 P09 }
  D18 { P11 P09 P10 }
  D19 { P05 P11 P10 }
  D20 { P01 P02 P05 }
  D21 { P02 P03 P05 }
  D22 { P03 P08 P09 }
  D23 { P05 P03 P09 }
  D24 { P05 P09 P10 }
@Punktbezeichnungen mit Koordinaten
  P01 [ 2, 17, 6,3 ]
  P02 [ 2, 1, 5,2 ]
  P03 [ 6, 1, 4,5 ]
  P04 [ 11, 9, 9,1 ]
  P05 [ 6, 17, 4,9 ]
  P06 [ 19, 13, 7,3 ]
  P07 [ 20, 6, 6, ]
  P08 [ 25, 1, 1,2 ]
  P09 [ 25, 9, 1, ]
  P10 [ 25, 17, 1,2 ]
  P11 [ 6, 15, 2, ]
  P12 [ 6, 9, 4, ]
  P13 [ 6, 3, 2, ]
END
@Ende des Quelltextes
```

9.2 Bilderverzeichnis

9.3 Formelverzeichnis

9.4 Tabellenverzeichnis

9.5 Sachverzeichnis (Index)

R

S

T

U

V